Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2– 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1721» или «Ф1728». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1721—М1725, Ф1728—Ф1732

М1721. Существуют ли натуральные числа x и y, которые удовлетворяют равенству $x^2 - 3y^2 = 2000$?

В.Сендеров

М1722. Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a; b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a; b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

М.Панов

М1723. Из точки на плоскости выходят n красных и n синих векторов. Красные векторы занумерованы натуральными числами от 1 до n. В порядке нумерации красные векторы поворачиваются по часовой стрелке и занимают положение первого свободного синего вектора так, что в конце концов красные векторы займут положения всех синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.

В.Произволов

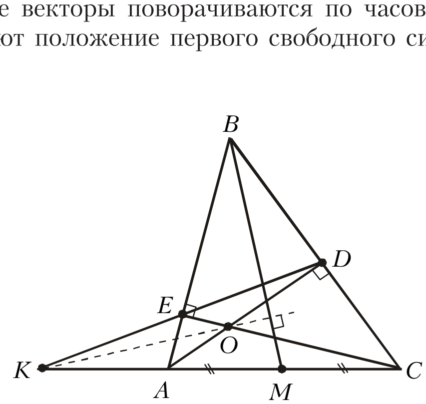

Рис.1

М1724. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O (рис. 1). Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке K. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой OK.

М.Волчкевич

М1725*. Из квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ клетчатой бумаги вырезана крестообразная фигура F (рис.2). Докажите, что

а) фигуру F нельзя разрезать на $2n$ выпуклых фигур;

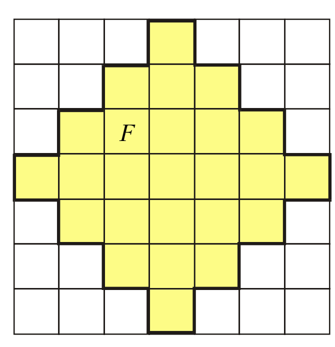

Рис.2

б) если фигура F разрезана на $2n + 1$ выпуклых многоугольников, то каждый из них является прямоугольником.

В.Произволов