Движение по окружности

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Систематизируя задачи о движении по окружности, обычно рассматривают два типа задач: о равномерном и неравномерном движениях.

Равномерное движение по окружности

Криволинейное движение всегда характеризуется не равным нулю ускорением. Когда говорят о равномерном движении по окружности, имеют в виду постоянство величины (модуля) скорости и изменение ее направления. Ускорение в таком случае перпендикулярно вектору скорости и направлено по радиусу к центру окружности. Учет этого обстоятельства существенно облегчает решение задач, так как в соответствии со вторым законом Ньютона точно известно направление суммы всех сил, действующих на тело. Векторное уравнение, отвечающее второму закону Ньютона, часто бывает удобнее заменить скалярными уравнениями, куда входят проекции соответствующих векторов на координатные оси. При этом одну ось обычно направляют по радиусу к центру окружности, а другую (если не все силы лежат в плоскости окружности) – перпендикулярно плоскости окружности.

Задача 1. *Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной l, массой m и жесткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.*

Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной ΔL и массой $\Delta m = m\Delta L/(2\pi R)$. На выделенный участок действуют силы упругости $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис.1), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю: $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона,

$$\Delta m\,\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 .$$

Рассматриваемый участок равномерно движется по окружности; следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Это ускорение сообщается суммой сил $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$, приложенных к участку.

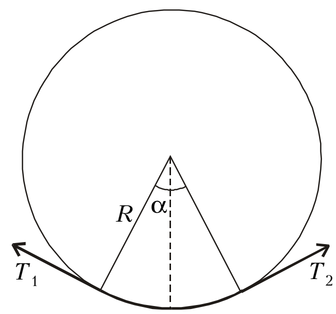

Рис. 1

Запишем второй закон Ньютона в проекциях сил и ускорений на радиальное направление:

$$\frac{m\Delta L}{2\pi R}\omega^2 R = 2T\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $(2\pi R - l)$ кольца законом Гука:

$$T = k(2\pi R - l).$$

При малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta L/(2R)$. С учетом этих соотношений уравнение движения принимает вид

$$\frac{m}{2\pi}\omega^2\Delta L = 2k(2\pi R - l)\frac{\Delta L}{2R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}.$$

Из полученного выражения следует, что при $\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$ кольцо должно неограниченно растягиваться. Однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а при некоторой скорости вращения кольцо просто разорвется.

Задача 2. *Маленький деревянный шарик прикреплен с помощью нерастяжимой нити длиной l = 30 см к дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити r = 20 см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения ω нить отклонится от вертикали на угол α = 30°? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.*

Нить с шариком отклонится к оси вращения (рис.2). На шарик будут действовать три силы: сила тяжести

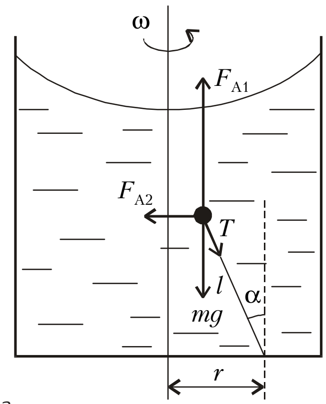

Рис. 2

$m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A$. Найдем последнюю силу. Обозначим объем шарика V, плотность дерева, из которого изготовлен шарик, $\rho_ш$, плотность воды $\rho_в$. Рассмотрим сначала движение жидкости до погружения в нее шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления, т.е. силы Архимеда, уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, а горизонтальная составляющая силы Архимеда сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости в элементарном объеме соответствующим фрагментом шарика эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая $\vec{F}_{A1}$ силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $\rho_в Vg$, а направленная к оси вращения горизонтальная составляющая $\vec{F}_{A2}$ силы Архимеда по величине равна $\rho_в V\omega^2(r - l\sin\alpha)$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиусом $r - l\sin\alpha$ в горизонтальной плоскости.

По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{А}},$$

или

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{А}1} + \vec{F}_{\text{А}2}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$0 = -\rho_{\text{ш}}Vg - T\cos\alpha + \rho_{\text{в}}Vg,$$

а проектируя силы и ускорение в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\rho_{\text{ш}}V\omega^2(r - l\sin\alpha) =$$

$$= \rho_{\text{в}}V\omega^2(r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\text{tg}\,\alpha}{r - l\sin\alpha}} \approx 11\ \text{c}^{-1}.$$

* * *

Умение описывать движение по окружности может существенно помочь при анализе движений по еще более сложным траекториям: винтовой линии или циклоиде. Действительно, движение по винтовой линии можно представить в виде суперпозиции движения по окружности и движения по прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через точку окружности. Движение по циклоиде тоже возможно представить как одновременные два движения: по окружности и по прямой, лежащей в плоскости окружности.

Задача 3. *По длинной проволочной винтовой линии с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Радиус воображаемой цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия, равен R. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке* μ *(*$\mu < H/(2\pi R)$*). Найдите установившуюся скорость* v_* *скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.*

На бусинку действуют силы тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. При этом $F_{\text{тр}} = \mu N$, как обычно, а $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, где $\vec{N}_1$ – горизонтальная составляющая, направленная к оси винтовой линии, а $\vec{N}_2$ лежит в одной вертикальной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис.3).

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что

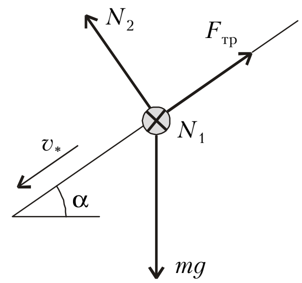

Рис. 3

естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью v_*. Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся по вертикали вниз со скоростью $v_*\sin\alpha$, где α – угол наклона вектора скорости к горизонту и $\text{tg}\,\alpha = H/(2\pi R)$. В выбранной системе бусинка равномерно движется по окружности радиусом R со скоростью $v_*\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно $(v_*\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, находим

$$m\frac{(v_*\cos\alpha)^2}{R} = N_1.$$

В вертикальной плоскости справедливо равенство

$$0 = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

откуда, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, получим

$$F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha,\quad N_2 = mg\cos\alpha.$$

Из этих соотношений с учетом того, что $F_{\text{тр}} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$, окончательно имеем

$$v_* = (gR/\mu)^{1/2}\left(\left(\text{tg}^2\alpha - \mu^2\right)\left(\text{tg}^2\alpha + 1\right)\right)^{1/4}$$

Задача 4*. *Протон движется в однородном и постоянном магнитном поле с индукцией* $\vec{B}$*. Векторы начальной скорости* $\vec{v}_0$ *и индукции* $\vec{B}$ *образуют угол* α*. Определите вид траектории протона в лабораторной системе отсчета. Масса протона m, заряд e.*

В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением для магнитной составляющей силы Лоренца имеем

$$m\vec{a} = e[\vec{v}, \vec{B}],$$

где $[\vec{v}, \vec{B}]$ – векторное произведение.[1] Проанализируем это уравнение. Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости $\vec{v}$; следовательно, эта сила не совершает работы, и по теореме об изменении кинетической энергии величина v скорости протона остается постоянной и равной своему начальному значению v_0. Сила Лоренца перпендикулярна также вектору индукции $\vec{B}$; следовательно, составляющая $\vec{v}_\parallel$ вектора скорости, параллельная вектору индукции, тоже остается постоянной и равной своему начальному значению $v_0\cos\alpha$. Тогда величина $v_\perp$ перпендикулярной вектору индукции составляющей скорости протона тоже остается постоянной и равной своему начальному значению $v_0\sin\alpha$.

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории со скоростью $\vec{V} = \vec{v}_\parallel$. С учетом закона сложения скоростей и представления скорости в виде суммы составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

получаем, что в рассматриваемой системе протон движется в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, с постоянной по величине (но не по направлению!) скоростью $\vec{v}' = \vec{v}_\perp$. Уравнение движения принимает вид

$$m\vec{a}' = e[\vec{v}_\perp, \vec{B}].$$

Отсюда следует, что величина вектора ускорения равна

$$a' = \frac{ev_\perp B}{m} = \frac{eBv_0\sin\alpha}{m}$$

и постоянна, а его направление перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}_\perp$. Значит, в рассматриваемой системе отсчета протон равномерно движется по окружности радиусом

$$R = \frac{v_\perp^2}{a'} = \frac{mv_0\sin\alpha}{eB}$$

с частотой

$$\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{eB}{m},$$

не зависящей от скорости.

Соответственно, движение протона относительно лабораторной системы отсчета осуществляется по винтовой

[1] *При решении этой и следующей задач используется понятие векторного произведения, которое известно учащимся специализированных классов физико-математического профиля. (Прим. ред.)*

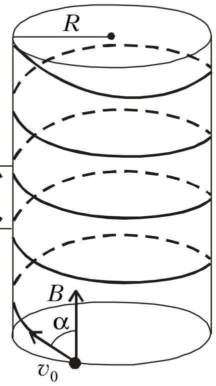

Рис. 4

линии (рис.4) с шагом винта

$$H = v_{\parallel}T = v_0 \cos\alpha \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{mv_0}{eB}\cos\alpha.$$

Задача 5*. *Протон движется в области пространства, где созданы однородные и постоянные электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{B}$ поля. Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и вектор $\vec{v}_0$ начальной скорости протона взаимно перпендикулярны (рис.5), причем $E \ll Bc$, где c – скорость света. Определите вид траектории протона в этой системе отсчета. Масса протона m, заряд e.*

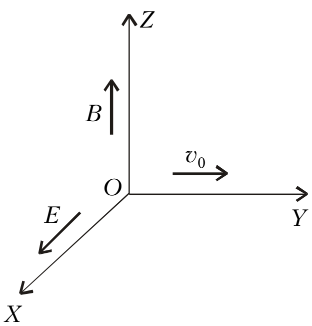

Рис. 5

Уравнение второго закона Ньютона для протона в скрещенных электрическом и магнитном полях имеет вид

$$m\vec{a} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}].$$

Попытаемся найти систему отсчета, в которой протон «чувствует» только магнитное поле. Для этого перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лабораторной системы с постоянной скоростью $\vec{V}$. Учитывая закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

и закон сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A},$$

уравнение движения запишем в виде

$$m\left(\vec{a}\,' + \vec{A}\right) = e\left(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]\right) + e[\vec{v}\,', \vec{B}].$$

Отсюда следует, что в выбранной системе, движущейся с постоянной скоростью

$$\vec{V} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2},\ V = \frac{E}{B} \ll c,$$

первое слагаемое в правой части уравнения движения обращается в ноль. Кроме того, вследствие постоянства скорости,

$$\vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = 0,$$

так что уравнение движения протона

$$m\vec{a}\,' = e[\vec{v}\,', \vec{B}]$$

совпадает с уравнением, полученным в предыдущей задаче. Приходим к выводу, что в системе отсчета, перемещающейся в отрицательном направлении оси OY со скоростью $V = E/B$ (рис.6,*а*), протон равномерно движется по окружности ($\vec{v}\,' \perp \vec{B}$) радиусом $R = \frac{v'}{\omega} = \frac{m}{eB}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)$ с частотой $\omega = \frac{eB}{m}$.

Итак, относительно лаборатории частица участвует в двух движениях: равномерном движении по окружности в подвижной системе отсчета и движении вместе с подвижной системой отсчета с постоянной скоростью $\vec{V}$. Средняя (дрейфовая) скорость частицы относительно лаборатории равна E/B и не зависит ни от массы, ни от величины заряда, ни от знака заряда. Все эти параметры влияют лишь на движение по окружности. В зависимости от соотношения между v и E/B траектория выглядит как сжатая, удлиненная или обычная циклоида (рис.6,*б*).

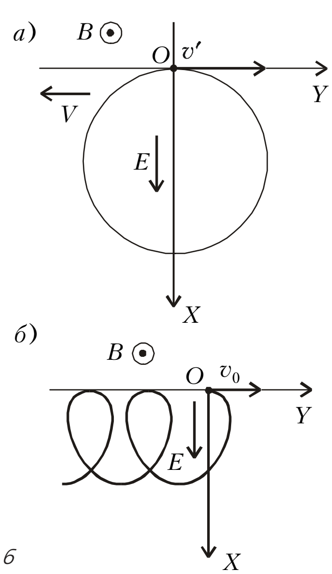

Рис. 6

Заметим, что с такой же суперпозицией движений мы встречаемся при изучении движения точек катящегося колеса.

Неравномерное движение по окружности

В отличие от равномерного движения по окружности, в случае неравномерного движения ускорение характеризует изменение не только направления скорости, но и ее величины. Соответственно, вектор ускорения удобно представить в виде суммы двух компонентов: ускорения, перпендикулярного скорости, его называют нормальным $\vec{a}_n$, или центростремительным (иногда осестремительным), и ускорения, касательного к траектории, его называют тангенциальным $\vec{a}_t$ (латинское tangens означает касающийся).

Задача 6. *Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в 1/6 длины окружности радиусом R = 100 м. С какой наибольшей по величине скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию μ = 0,3? Ускорение свободного падения g = 10 м/с². Все колеса автомобиля ведущие. Нагрузки на переднюю и заднюю оси одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.*

На автомобиль в процессе разгона действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, которая единственная сонаправлена с ускорением $\vec{a}$. Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно обратиться к величинам тангенциальной a_t и нормальной a_n составляющих ускорения. По условию a_t постоянна; следовательно, скорость v автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая a_t связаны соотношением

$$v = \sqrt{2a_t s} = \sqrt{2a_t \frac{\pi R}{6}},$$

откуда получаем

$$a_t = \frac{3v^2}{\pi R}.$$

Нормальная (центростремительная)

составляющая определяется формулой

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{\max} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3v^2}{\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \frac{v^2}{R}\sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует

$$N = mg,$$

а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max} = \frac{F_{\text{тр max}}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g.$$

Таким образом, наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$v = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 15 \text{ м/с}.$$

* * *

Однако значительное количество задач о неравномерном движении по окружности не решается простой записью проекций уравнения второго закона Ньютона (уравнения движения) на радиальное и касательное направления. На таком пути возникают математические трудности при использовании тангенциальной составляющей уравнения движения. Выход находят в замене этого уравнения формулой, описывающей закон сохранения механической энергии.

Задача 7. *На горизонтальной поверхности лежит полушар массой M = = 100 г (рис.7). Из его верхней точки*

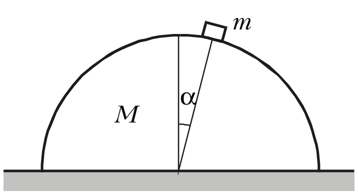

Рис. 7

без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой m = 10 г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при α = 10°. Найдите коэффициент трения μ.

Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ (рис.8). Из второго закона Ньютона,

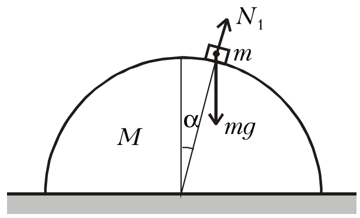

Рис. 8

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, в момент начала движения полушара получаем

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N_1.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos\alpha).$$

Из этих соотношений находим

$$N_1 = mg(3 - 2\cos\alpha).$$

На полушар действуют силы тяжести $M\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}_2$, трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и давления со стороны шайбы $\vec{F}$ (рис.9). Из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на вертикальное направление с учетом равенства $F = N_1$, получаем

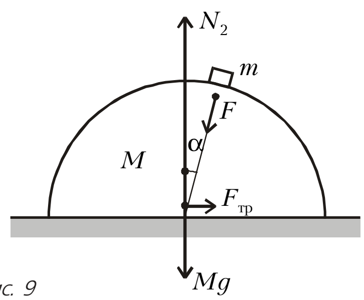

Рис. 9

$$N_2 = Mg + F\cos\alpha =$$

$$= Mg + mg(3 - 2\cos\alpha)\cos\alpha.$$

В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением $F_{\text{тр}} = \mu N_2$, а из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на горизонтальное направление, следует

$$F_{\text{тр}} = F\sin\alpha = mg(3 - 2\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N_2} = \frac{m(3 - 2\cos\alpha)\sin\alpha}{M + m(3 - 2\cos\alpha)\cos\alpha} \approx$$

$$\approx \frac{m}{M}\alpha = 0{,}017.$$

Упражнения

1. По резиновой трубке, свернутой в виде кольца, циркулирует со скоростью v вода. Радиус кольца R, диаметр трубки $d \ll R$. С какой силой T растянута резиновая трубка?

2. Закрытая пробирка длиной l, полностью заполненная жидкостью, составляет угол α с вертикальной осью, проходящей через ее нижний конец. В жидкости плавает легкая пробка. До какой угловой скорости ω следует раскрутить пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы пробка погрузилась до середины пробирки?

3. Слабо расходящийся пучок протонов, стартующих из одной точки пространства, в котором создано однородное постоянное магнитное поле $\vec{B}$, так, что векторы скорости $\vec{v}_0$ протонов составляют малые углы с вектором поля $\vec{B}$. На каком расстоянии L от точки старта пучок протонов впервые сфокусируется? Масса протона m, заряд e.

4*. Протон движется в области пространства, где созданы взаимно перпендикулярные однородные и постоянные электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{B}$ поля. Вектор $\vec{v}_0$ начальной скорости перпендикулярен $\vec{E}$ и имеет ненулевую составляющую $\vec{v}_{0\parallel}$, параллельную $\vec{B}$. Считая, что $E \ll Bc$, где c – скорость света, найдите скорость $\vec{V}$ системы отсчета, в которой протон движется по окружности.

5. На кольцевой горизонтальной дороге радиусом R = 1000 м стартует гоночный автомобиль и разгоняется так, что величина скорости увеличивается на 2 м/с за каждую секунду. В течение какого времени τ гонщику удастся удерживать автомобиль на дороге, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию μ = 0,5? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ведущие колеса автомобиля – задние, нагрузки на переднюю и заднюю оси одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.

6. Маятник, имеющий на конце нити шарик массой m и зарядом Q, находится в поле тяжести и в однородном электрическом поле, напряженность $\vec{E}$ которого перпендикулярна ускорению свободного падения $\vec{g}$. Маятник отклоняют до горизонтального положения в плоскости векторов $\vec{E}$ и $\vec{g}$ и отпускают. Найдите натяжение нити T, когда маятник будет проходить положение равновесия в данных полях.

7. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой M = 200 г. Из его верхней точки в противоположных направлениях без трения с нулевыми начальными скоростями начинают скользить две шайбы массами m_1 = 20 г и m_2 = 15 г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается в тот момент, когда одна из шайб пройдет 1/36 длины окружности большого круга. Найдите коэффициент трения μ.