Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №4 за 1999 г.)

1. *Ответ*: нельзя. Периметр квадрата 4×4 выражается рациональным числом, а гипотенуза прямоугольного треугольника – «половинки» единичного квадрата – равна $\sqrt{2}$, т.е. числу иррациональному. Следовательно, гипотенузы всех фигурок должны спрятаться внутри квадрата 4×4, располагаясь парами гипотенуза к гипотенузе. Но в пяти фигурках гипотенузы расположены параллельно, а в трех – перпендикулярно друг к другу. Это значит, что любая попытка сложить квадрат будет неудачной, так как по крайней мере одна гипотенуза окажется в паре с перпендикулярной ей гипотенузой.

2. а) *Ответ*: 5 поколений. Чтобы в этом убедиться, сначала покажем, что 6 поколений микробов на листе не поместятся. Назовем *ходом* передвижение от любой клетки к любой соседней с ней клетке. Поскольку микробы очередного поколения находятся в клетках, соседних с теми, где содержатся микробы предыдущего поколения, то микробы шестого поколения (и всех предыдущих) должны находиться в пределах области клеток, до которых можно добраться от исходной клетки, где первоначально был микроб первого поколения, не более чем за 5 ходов. Так как при каждом ходе происходит перемещение по вертикали или по горизонтали, то нетрудно изобразить эту «отступную» область, имеющую характерный ступенчатый вид (рис.1).

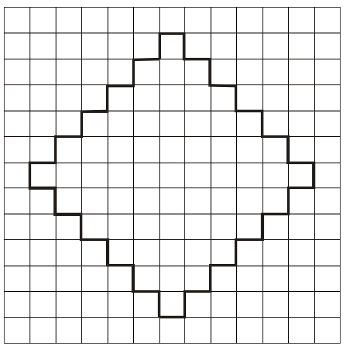

Рис. 1

Легко подсчитать (или непосредственно, или используя арифметическую прогрессию), что изображенная область содержит 61 клетку. Однако общее число микробов с первого по шестое поколение включительно равно $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^5 = 2^6 - 1 = 63 > 61$. Таким образом, шестому поколению микробов места уже не хватит.

С другой стороны, 5 поколений микробов вполне могут разместиться. Вот один из примеров их итогового расположения (рис.2; здесь не указано, какой микроб каким конкретно порожден, поскольку восстановить это несложно).

			5		5			
		5	4	5	4	5		
	5	4	3		3	4	5	
		5	2	1	2	5		
	5	4	3		3	4	5	
		5	4	5	4	5		
			5		5			

Рис. 2

б) *Ответ*: 7 поколений. Идея решения – абсолютно та же самая, и, несмотря на кажущуюся сложность по сравнению с предыдущей задачей, количественная оценка также дает верное значение. Убедимся, что 8 поколений разместить невозможно. В данном случае допускаются также и ходы по диагонали, поэтому максимальная область размещения микробов (содержащая клетки, до которых можно добраться за 7 ходов) представляет собой квадрат со стороной $2\times 7 + 1 = 15$ клеток с центром в исходной клетке. Всего в нем $15^2 = 225$ клеток. В то же время общее число микробов в восьми поколениях равно $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^7 = 2^8 - 1 = 255 > 225$. Семь же поколений разместить можно – на рисунке 3 показан пример их итогового расположения.

	7	7	7	7		7		7		7				
	7	6	7	6	6	6	6		6	6	7			
	7	6	5	7	5	7	5	7	5	7	7			
		7	7	4		4		4	7	6				
	7	6	5	7	3	7	3		5	7	7	7		
	7	6		4	6	2	7	6	7	6	7	6	7	
		6	5	7	5	7	1	7	5	7	5	6		
	7	6	7	6	7	6	7	2	6	4		6	7	
		7	7	7	5		3	7	3	7	5	6	7	
				6	7	4		4		4	7	7		
			7	7	5	7	5	7	5	7	5	6	7	
			7	6	6		6	6	6	6	7	6	7	
				7		7		7		7	7	7	7	

Рис. 3

3. а) *Первое решение.* Покажем, что если число x^2 оканчивается на 21, то стоящая в разряде сотен цифра числа x должна быть нечетной. Число x оканчивается либо на 1, либо на 9. Пусть $x = 10a + 1$, тогда $x^2 = (10a+1)^2 = 100\cdot a^2 + 10\cdot 2a + 1$, и следовательно, число $2a$ оканчивается на 2, а само число a – либо на 1, либо на 6. Если $a = 10b + 1$, то $x^2 = (100b+11)^2$, и в разряде сотен числа x^2 стоит нечетная цифра. Аналогично, если $a = 10b + 6$, то $x^2 = (100b+61)^2$ – в разряде сотен опять стоит нечетная цифра.

Случай $x = 10a + 9$ разбирается аналогично.

Итак, если x^2 оканчивается на 21, то в разряде сотен числа x^2 не может стоять цифра 2. Очевидно также, что $x^2 \neq 21$, поэтому ни при каких натуральных $x > 1$ уравнение $x^2 + 1 = \overline{22\ldots2}$ не имеет решений.

Второе решение. Если бы в разряде сотен числа x^2 стояла четная цифра, то при делении на 8 число x^2 давало бы в остатке 5, а этого быть не может (квадрат любого натурального числа при делении на 8 дает в остатке либо 0, либо 1, либо 4).

б) *Первое решение.* Предположим, такое число x существует, тогда, разделив 77…76 на 4, получим квадрат, оканчивающийся на 19. Этого быть не может, поскольку хотя бы одна из двух последних цифр квадрата всегда четна. Следовательно, уравнение $x^2 + 1 = \overline{77\ldots7}$ также ни при каких натуральных $x > 1$ решений не имеет.

Второе решение. Число $\overline{777\ldots76}$ при делении на 7 дает остаток 6, однако квадрат натурального числа при делении на 7 не может давать такой остаток.

4. В параллелограмме $ABCD$ проведем хорду $PQ \parallel AD$. Через точку Q проведем два отрезка QN и QM до пересечения со сторонами параллелограмма AD и BC параллельно его диагоналям: $QN \parallel AC$; $QM \parallel BD$. Через точку P и центр параллелограмма O проведем прямую до пересечения со стороной CD; получим точку R. Докажем, что четырехугольник $PMRN$ – искомый.

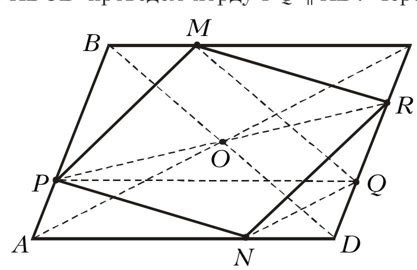

Рис. 4

По теореме Фалеса $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{CM}{BM}$. Так как точки N и M делят равные отрезки AD и BC в равном отношении, то $AN = MC$, $ND = MB$. Из равенства $\Delta APO = \Delta CRO$ следует $AP = CR$. Отсюда с учетом равенства углов A и C получаем $\Delta APN = \Delta CRM$ и, в частности, $PN = MR$. Так как, к тому же, при $AD \parallel BC$ углы ANP и CMR равны, то $MR \parallel PN$ и, следовательно, четырехугольник $PMRN$ – параллелограмм.

Докажем, что площади треугольников APN и NRD равны (отсюда будет следовать, что площади всех треугольников APN, NRD, CMR, BPM также равны, поскольку $\Delta BPM = \Delta DRN$, $\Delta APN = \Delta CRM$).

По свойству сторон параллелограмма $AP = QD$. С учетом $AP = CR$ отсюда получаем $CQ = RD$ и $AN : ND = CQ : QD = RD : QD = k$. Треугольники APN и NQD имеют равные высоты, поэтому площадь треугольника APN в k раз больше площади треугольника NQD. Треугольники NRD и NQD имеют общую сторону ND и одну из сторон, лежащую на общей прямой DR, поэтому площадь треугольника NRD также в k раз больше площади треугольника NQD. Отсюда следует равенство треугольников APN и NRD.

5. Обозначим искомые числа $\frac{x}{y}$ и z, где x, y, z – целые, $y \neq 0$. По условию $\frac{x}{y} + z = \frac{x}{y} \cdot z$, откуда $x + yz = xz$, $z = \frac{x}{x-y}$. Одно из возможных решений получим, если положим $y = x - 1$.

Итак, пусть $x \neq 1$ – любое целое число. Условию задачи, например, удовлетворяют пары чисел $\frac{x}{x-1}$, x.

Малая теорема Ферма

1. $a^3 + 5a = \left(a^3 - a\right) + 6a$.
2. $x \equiv 71 \pmod{101}$.
3. $x \equiv 0 \pmod 6$.
6. а) В произведении четырех последовательных целых чисел обязательно есть множитель, кратный 4. Кроме него, есть еще один четный множитель.
в) $a^5 - 5a^3 + 4a = a\left(a^2 - 1\right)\left(a^2 - 4\right) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$.
8. *Указание*. Если числа m, n не кратны 5, то $\left(m^4 - 1\right) - \left(n^4 - 1\right)$ кратно 5 вследствие малой теоремы Ферма.
9. $k^4 - 1 = (k-1)(k+1)\left(k^2+1\right)$. Все сомножители четны; при этом одно из чисел $k - 1$ и $k + 1$ кратно 4. Делимость $k^2 - 1$ на 3 и делимость $k^4 - 1$ на 5 следуют из малой теоремы Ферма.
10. а) *Первый способ*. Поскольку $2222 = 7 \cdot 317 + 3$ и $5555 = 7 \cdot 793 + 4$, имеем: $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} = 3^{6\cdot 925+5} + 4^{6\cdot 370+2} = \left(3^6\right)^{925} \cdot 3^5 + \left(4^6\right)^{370} \cdot 4^2 \equiv 1^{925} \cdot 243 + 1^{370} \cdot 16 = 259 = 7 \cdot 37 \equiv 0 \pmod 7$.
Второй способ. Число $\left(2222^5\right)^{1111} + \left(5555^2\right)^{1111}$ кратно числу $2222^5 + 5555^2 \equiv 3^5 + 4^2 \equiv 0 \pmod 7$.
11. $11^{10} - 1 = (11-1)\left(11^9 + 11^8 + \ldots + 11 + 1\right)$.
12. а) $a = 10k \pm 3$, где k – целое число.
13. $(-1)^n - (-1) = 2$.
14. *Указание*. Поскольку число $2^n - 2$ является одним из значений многочлена $a^n - a$, наибольший общий делитель чисел вида $a^n - a$ не превосходит $2^n - 2$ (и является делителем числа $2^n - 2$). Для любого целого числа a существует хотя бы одно число в пределах от 1 до $2^n - 2$, сравнимое с a по модулю $2^n - 2$.
15. Да, существует.
18. *Ответ*: 15. *Решение*. $3^{2000} = 3^{47\cdot 42+26} = \left(3^{47}\right)^{42} \cdot 3^{26} \equiv 3^{26} = 9^{13} = 9 \cdot 9^{12} = 9 \cdot 81^6 \equiv 9 \cdot (-5)^6 = 9 \cdot 125^2 \equiv 9 \cdot (-4)^2 = 9 \cdot 16 = 144 \equiv 15 \pmod{43}$.
19. $a^{16} - 1 = \left(a^8 - 1\right)\left(a^8 + 1\right)$.
20. $56786730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$.
21. $5^{p^2} + 1 = \left(5^p\right)^p + 1 \equiv 5^p + 1 \equiv 5 + 1 = 6 \pmod p$. *Ответ*: $p = 2$ или 3.
24. Обозначим первую цифру буквой a, а число, получаемое из исходного шестизначного числа вычеркиванием первой цифры, обозначим буквой b. Исходное число равно $100000a + b$, а число, полученное из него перестановкой цифр, равно $10b + a$. Осталось заметить, что

$$(100000a + b) \cdot 10 = 10^6 a + 10b = \left(10^6 - 1\right)a + 10b + a \equiv 10b + a \pmod 7.$$

25. $\underbrace{11\ldots1}_{p-1} = \underbrace{99\ldots9}_{p-1}\Big/9 = \left(10^{p-1} - 1\right)\Big/9$. Число $10^{p-1} - 1$ кратно p по малой теореме Ферма.
26. При $p = 3$ воспользуйтесь признаком делимости на 3. При $p = 2$ или 5 утверждение следует из того, что рассматриваемое число оканчивается той же самой цифрой, что и число 123456789.
Пусть $p \neq 2, 3, 5$. Докажем, что разность

$$\underbrace{aa\ldots a}_{p}\underbrace{00\ldots0}_{(9-a)p} - a\underbrace{00\ldots0}_{9-a},$$

где $1 \leq a \leq 9$, кратна p. В силу предыдущего упражнения, число $\underbrace{aa\ldots a}_{p-1}$ кратно p. Поэтому достаточно заметить, что число

$$a\underbrace{00\ldots0}_{(9-a)p} - a\underbrace{00\ldots0}_{9-a} = a \cdot 10^{(9-a)p} - a \cdot 10^{9-a} = a\left(\left(10^{9-a}\right)^p - 10^{9-a}\right)$$

кратно p по малой теореме Ферма.
28. а) Поскольку $\varphi(9) = 6$, для любого не кратного 3 числа k, по теореме Эйлера, $k^6 - 1$ кратно 9. Далее, $k^6 - 1 = \left(k^3 - 1\right)\left(k^3 + 1\right)$, причем числа $k^3 - 1$ и $k^3 + 1$ отличаются на 2 и потому не могут одновременно быть кратны 3.
29. а) В силу предыдущего упражнения, куб не кратного трем числа сравним с 1 или −1 по модулю 9. Сумма трех чисел, каждое из которых равно 1 или −1, не может быть кратна 9.
30. *Указание*. Поскольку $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, последняя цифра числа 7^k определяется остатком от деления числа k на 4. Далее,

$$7^{2m+1} = (8-1)^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1} = -1 \pmod 4.$$

31. Применим теорему Эйлера:

$$7^{400} \equiv 1 \pmod{1000}.$$

Следовательно,

$$7^{10000} = \left(7^{400}\right)^{25} \equiv 1^{25} = 1 \pmod{1000}.$$

Поскольку произведение $7 \cdot 7^{9999} = 7^{10000}$ оканчивается цифрами 001, то последняя цифра числа 7^{9999} равна 3. Значит, из разряда единиц в разряд десятков при умножении 7^{9999} на 7 переносится 2. Поэтому предпоследняя цифра числа 7^{9999} равна 4, и из разряда десятков в разряд сотен переносится 3. Теперь ясно, что в разряде сотен числа 7^{9999} находится цифра 1. *Ответ*: 7^{9999} оканчивается на 143.
33. Поскольку $\varphi(n) \leq n$, число $n!$ кратно $\varphi(n)$. Поэтому $2^{n!} - 1$ кратно числу $2^{\varphi(n)} - 1$, которое кратно n по теореме Эйлера.
34. Если n – нечетное число, то можно сгруппировать первое слагаемое с последним, второе с предпоследним и так далее:

$$\left(1^n + (n-1)^n\right) + \left(2^n + (n-2)^n\right) + \ldots + \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^n + \left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right).$$

Поскольку $k^n + (n-k)^n \equiv k^n + (-k)^n = 0 \pmod n$, при нечетном n рассматриваемая сумма кратна n.
Если же n четно, пусть 2^s – наивысшая степень двойки, на которую n делится нацело. Тогда для любого четного числа k, очевидно, $k^n \equiv 0 \pmod{2^s}$; а для любого нечетного числа k, по теореме Эйлера, $k^n = \left(k^{n/2^{s-1}}\right)^{2^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$. Следовательно, $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \not\equiv 0 \pmod{2^s}$. А если сумма не кратна 2^s, то она тем более не кратна числу n.
35. Пусть $s = 2^a \cdot 5^b \cdot t$, где a, b – целые неотрицательные числа, t – натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Существует такое натуральное число r, что $10^r \equiv 1 \pmod t$. Пусть $n = 10^{\max(a,b)} \cdot \left(1 + 10^r + 10^{2r} + \ldots + 10^{(s-1)r}\right)$.

Очевидно, сумма цифр числа n равна s. Поскольку $10^{\max(a,b)}$ делится нацело на $2^a \cdot 5^b$ и $1 + 10^r + 10^{2r} + \ldots + 10^{(s-1)r} \equiv$ $\equiv s \equiv 0 \pmod{t}$, число n кратно s.

36. $2^{a+1} \cdot 5^{b-1}$

37. а) $\varphi(pq) = pq - q - p + 1 = (p-1)(q-1)$.

38. а) $x = 3$; б) $x = 3$, $y = 2$. **40.** $\varphi(n)/2$.

41. а) Пусть простое число p входит в разложения чисел m и n на простые множители, соответственно, в s-й и t-й степенях. Для определенности пусть $s \le t$. Если $s > 0$, то число p входит в разложения на простые множители чисел НОК(m,n) и НОД(m,n) в t-й и s-й степенях. Значит, если $s > 0$, то благодаря числу p при подсчете значений функции Эйлера $\varphi(m)$, $\varphi(n)$, $\varphi(\text{НОК}(m,n))$ и $\varphi(\text{НОД}(m,n))$ возникнут, соответственно, множители $p^{s-1}(p-1)$, $p^{t-1}(p-1)$, $p^{t-1}(p-1)$ и $p^{s-1}(p-1)$. Если же $s = 0$, то p не входит в разложения на простые множители чисел m и НОД(m,n), а в разложения чисел n и НОК(m,n) оно входит в одной и той же степени.

в) Следует из пунктов а) и б).

г) Поскольку НОД$(m,n) > \varphi(\text{НОД}(m,n))$, из равенства предыдущего пункта следует, что $\varphi(m)\varphi(n) < \varphi(mn)$.

42. а) $x = 19$, 38, 27 или 54.

б) $x = 13$, 26, 21, 42, 28 или 36.

в) Так как при $x > 2$ число $\varphi(x)$ четно, то четным должно быть и само число x. Поскольку каждое второе натуральное число четно, $\varphi(x) \le x/2$. Следовательно, $12 = x - \varphi(x) \ge x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}$, откуда $x \le 24$. *Ответ*: $x = 18$, 20 или 22.

г) *Ответ*: x – простое число. *Указание*. Если p – простое число, m – натуральное число, то $\varphi(p^{2m}) = p^{2m} - p^{2m-1} \le$ $\le p^{2m} - p^m$, причем неравенство обращается в равенство лишь при $m = 1$. Далее, для любых отличных от 1 натуральных чисел x и y докажите неравенство

$$(x^2 - x)(y^2 - y) < (xy)^2 - xy.$$

Теперь легко доказать, что $\varphi(x^2) < x^2 - x$ для любого составного числа x.

д) $x = 2^m$, где m – натуральное число.

е) Число x кратно 3. Поэтому его можно представить в виде $x = 3^m y$, где m – натуральное число, а y не кратно 3. Поскольку $\varphi(3^m y) = \varphi(3^m)\varphi(y) = 2 \cdot 3^{m-1}\varphi(y)$, то уравнение $\varphi(x) = x/3$ принимает вид $2\varphi(y) = y$. Последнему уравнению удовлетворяют, как мы знаем из предыдущего пункта этого упражнения, только степени двойки. *Ответ*: $x = 2^k \cdot 3^m$, где k, m – натуральные числа.

ж) *Указание*. Если бы в разложении числа x на простые множители содержалось более одного нечетного простого числа, то степень двойки в левой части равенства была бы выше, чем в правой. Если $x = 2^k p^m$, где k, m – натуральные числа, p – нечетное простое число, то $\varphi(x) = 2^{k-1}(p-1)p^{m-1}$, и уравнение $\varphi(x) = x/n$ можно записать в виде $p - 1 = 2p/n$. *Ответ*: решений нет.

з) В силу пункта в) предыдущего упражнения, $\varphi(nx) \ge \varphi(n)\varphi(x)$. Следовательно, $\varphi(n) \le 1$, т.е. $n = 2$. При $n = 2$ в качестве x можно взять любое нечетное число.

43. в) Задачу удобно решать с конца, т.е. искать кратчайший способ получения нуля из произвольного числа n с помощью двух операций – вычитания единицы и деления пополам. Пусть $f(n)$ – число операций в таком кратчайшем способе. Если $n = 2k + 1$ – нечетное число, то делить его пополам нельзя, так что $f(2k + 1) = 1 + f(2k)$. Докажем индукцией по k, что $f(2k) = 1 + f(k)$. Для $k = 1$ это ясно. Пусть утверждение доказано для всех $k < K$. Если из числа $2K$ сначала вычесть единицу, то для получения нуля потребуется как минимум $1 + f(2K - 1) = 2 + f(2K - 2) = 3 + f(K - 1)$ операций. Если же сначала разделить $2K$ пополам, то потребуется лишь $1 + f(K) \le 2 + f(K - 1)$ операций. Теперь индукцией по m легко доказать, что $f(n) = m + a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

а), б) В частности, $f(100) = f(1100100_2) = 6 + 1 + 1 + 0 +$ $+ 0 + 1 + 0 + 0 = 9$ и $f(9907) = f(10011010110011_2) = 13 + 1 +$ $+ 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 21$.

44. б) The magic words are squeamish ossifrage.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Поскольку оба тела движутся с одинаковыми ускорениями, расстояние между ними будет оставаться неизменным.

2. Вес человека, полностью погруженного в воду, пропорционален ускорению свободного падения и разности плотностей его тела и воды. Если вода на Земле и на Луне одна и та же, то легче плавать на Луне, где ускорение свободного падения примерно в 6 раз меньше, чем на Земле.

3. Да.

4. По закону всемирного тяготения по мере удаления от Земли сила притяжения уменьшается от mg до нуля. Поэтому вес тела убывает от $2mg$ у поверхности Земли до mg на бесконечности.

5. Нет.

6. Космонавтам приходится спать вниз головой, чтобы обеспечить привычный за время полета приток в нее крови, как в невесомости.

7. Да, поскольку невесомость не сказывается на тепловом расширении жидкости.

8. Нет.

9. Это связано с вращением Земли вокруг собственной оси.

10. У крупных массивных тел сила тяжести преобладает над силой упругости и «топит» любую выступающую часть планеты. На астероидах и ядрах комет сила тяжести ничтожна, их форма определяется процессами соударения, слипания и разрушения, поэтому может быть весьма разнообразной.

11. Из-за сплюснутости Земного шара у полюсов длина пути по меридиану будет меньше, чем по экватору; поэтому второй путешественник вернется раньше.

12. Со скоростью, при которой линейная скорость на экваторе сравняется с первой космической скоростью.

13. Обратимся к объяснению Ричарда Фейнмана: «... притяжение Луной суши и воды уравновешено в центре < Земли – *А.Л.* >. Но притяжение Луной тех масс воды, которые находятся на «лунной» стороне Земли, сильнее, чем среднее притяжение всей Земли, а притяжение масс воды на обратной стороне Земли слабее среднего. Кроме того, вода в отличие от суши может течь. Истинная причина приливов определяется этими двумя факторами».

14. На приливное действие Луны накладывается приливное действие Солнца.

15. В те далекие времена (около двух миллиардов лет назад) затмения были не только более продолжительными, но и значительно более частыми – ведь лунная тень покрывала значительно большую площадь Земли, чем сейчас.

16. Из-за неоднородности поля тяготения Солнца даже на сферически симметричной планете, не вращающейся вокруг своей оси, ускорения свободного падения в разных точках поверхности планеты оказались бы неодинаковыми.

Микроопыт

Нет. На вас со стороны воды действует выталкивающая сила, равная силе тяжести; значит, с вашей стороны на воду действует ваш вес.

Две задачи Архимеда

1. Пусть $AB = 2R$, $AC = 2r$, тогда площадь арбелона $S =$ $= \pi\left(R^2 - r^2 - (R - r)^2\right)/2 = \pi r(R - r)$. Из равенства $CD^2 =$

$= AC \cdot CB = 4r(R-r)$ (см. рис.3 статьи) находим, что площадь круга, построенного на диаметре CD, равна $\pi r(R-r)$.

2. Пусть F и G – середины отрезков AC и AB (см. рис.4 статьи); K – центр окружности, касающейся отрезка CD слева; ее радиус обозначим через x. Из треугольника GKH находим $KH^2 = (R-x)^2 - (2r-R-x)^2$, а из треугольника FKH получаем $KH^2 = (r+x)^2 - FH^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2$. Отсюда $x = r(R-r)/R$. Полученное выражение симметрично относительно r и $(R-r)$, следовательно, радиус окружности, касающейся отрезка CD справа, тот же.

3. Следует учесть, что $\operatorname{tg}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) = 2n(R-r)/(R+r)$, а поэтому $\operatorname{tg}\varphi_n = 2(R-r)(R+r)\Big/\left((R+r)^2 + 4n(n-1)(R-r)^2\right)$.

4. Биссектриса угла LBD' перпендикулярна всем окружностям Γ', γ_n', $\tilde{\gamma}_n'$ (см. рис.10 статьи). При инверсии она перейдет в дугу окружности, ортогональную Γ, γ_n, $\tilde{\gamma}_n$ и проходящую через точки A и B. Центром этой окружности является точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра к AB. Этот центр находится на расстоянии $R\sqrt{2}$ от точки A.

5. Пусть $R_n > R_{n-1}$ – радиусы соседних окружностей. Соединим их центры. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является полученный отрезок, а катеты параллельны BL и BD'. Имеем $R_n + R_{n-1} = (R_n - R_{n-1}) \cdot \sqrt{2}$, откуда $R_n : R_{n-1} = (\sqrt{2}+1) : (\sqrt{2}-1)$.

Движение по окружности

1. $T = \rho v^2 \pi d^2/4$, где ρ – плотность воды.

2. $\omega = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{l}}$. **3.** $L \approx 2\pi m v_0/(eB)$.

4. $\vec{V} = \dfrac{[\vec{E},\vec{B}]}{B^2} + \vec{v}_{0\parallel}$.

5. $\tau = \dfrac{\sqrt{R}}{a_t}\left(\mu^2 g^2 - 4a_t^2\right)^{1/4} \approx 27$ с, где $a_t = 2$ м/с^2.

6. $T = 3\sqrt{(QE)^2 + (mg)^2} - 2QE$.

7. $\mu = \dfrac{(m_1 - m_2)(3 - 2\cos\alpha)\sin\alpha}{M + (m_1+m_2)(3-2\cos\alpha)\cos\alpha} \approx \dfrac{m_1 - m_2}{M}\alpha = 4{,}4 \cdot 10^{-3}$, где $\alpha = 10°$.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\sqrt{2}$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $1/3$.

3. $[3; 5]$. *Указание* Условие задачи равносильно тому, что сумма данных выражений неположительна, т.е. что $|y| \le |y-15| - 15$, где $y = x^2 - 8x + 15$.

4. 24. *Указание.* Треугольники ABC и ADE подобны, так как около четырехугольника $ACED$ можно описать окружность ($\angle CED = 180° - (\angle ECD + \angle EDC) = 180° - (\angle BAC + \angle BAD) = 180° - \angle CAD$).

5. $a \in (-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$f(x) = \frac{(y-2a-2)(y+a-3)}{(a+3)(y+3a+3)} \le 0, \text{ где } y = 2^x.$$

Если $a + 3 < 0$, то неравенство справедливо при всех $y > y_0$, где y_0 – наибольший из корней числителя и знаменателя. При $a + 3 > 0$ должно быть либо $f(0) \le 0$, либо $3a + 3 = 0$. В обоих случаях неравенство справедливо на некотором промежутке $0 < y < \alpha$, где $\alpha > 0$. Но тогда множество решений исходного неравенства содержит луч $x < \log_2 \alpha$.

6. 126. *Указание.* Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – площади треугольников SBC, SAB, SAD и SCD соответственно, V_1, V_2, V_3, V_4 – объемы треугольных пирамид $ESBC$, $ESAB$, $ESAD$ и $ESCD$. Поскольку точка E одинаково удалена от боковых граней (она лежит на прямой SO!), $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = S_{EBC} : S_{EAB} : S_{EAD} : S_{ECD}$ (последнее равенство получается из того, что треугольные пирамиды с вершиной S имеют общую высоту). Следовательно,

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{S_{EAB}}{S_{EBC}} = S_1 \cdot \frac{AD}{BC} = 20,$$

$$S_3 = S_2 \cdot \frac{AD}{BC} = 50,$$

$$S_4 = S_1 \cdot \frac{AD}{BC} = 20.$$

Осталось заметить, что отношение полной поверхности $S_{\text{полн}}$ к площади основания $S_{\text{осн}}$ равно отношению объемов $V_{SABCD} : V_{OABCD} = h : r = SE : OE = 9/2$, отношение $S_{\text{полн}} : S_{\text{бок}} = \dfrac{9}{7}$. Откуда $S_{\text{полн}} = 98 \cdot \dfrac{9}{7} = 126$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -11/6] \cup \{0\}$. **2.** -3.

3. $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно совокупности $x = 2\pi k$, $\sin(x + \varphi) = \dfrac{1}{2}$, решениям которой соответствуют 3 точки тригонометрической окружности, которые должны располагаться в вершинах правильного треугольника.

4. а) 1 : 1, 5 : 9; б) 5 : 21. *Указание.* Точки L и N лежат на средней линии трапеции, $AB = AK$, $KD = CD$, $AK : KD = 9 : 5$.

Углы KLM и KNM прямые, точки K, L, M, N лежат на одной окружности. Отсюда следует, что треугольники KLM и DNK подобны, откуда $\dfrac{KM}{KD} = \dfrac{LM}{KN}$, аналогично

$$\frac{MN}{KL} = \frac{KM}{AK} = \frac{KM}{KD} \cdot \frac{KD}{AK} = \frac{5}{21}.$$

5. $a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$. *Указание.* Пусть $f(x)$ – числитель, а $g(x)$ – знаменатель дроби из условия задачи. Поскольку $f(0) = g(0) < 0$, а разность $f(x) - g(x) = (a^2 - 7a + 13)x$ положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$, корни трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ различны и перемежаются (рис.5). Решения неравенства удовлетворяют условию, если и только если $(x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) \ge 1$, или, по теореме Виета,

$$a^2 - 7a + 12 \ge 0.$$

6. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{31}{5}}$. *Указание.* Центры шаров – вершины треугольника со сторонами 3, 6, 7 и площадью $S = 4\sqrt{5}$. Точки касания с одной из плоскостей – вершины треугольника со сторонами $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{10}$ и площадью $S' = \sqrt{31}$. Угол φ между плоскостями этих треугольников удовлетворяет соотношению $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$. Дальнейшее ясно.

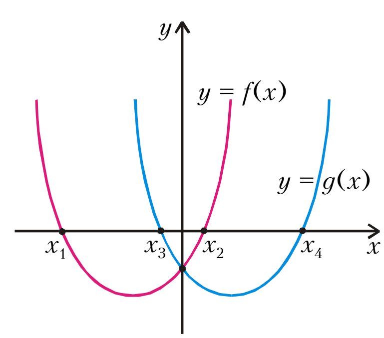

Рис. 5

Вариант 3

1. 5 км. **2.** $\{3\}\cup[8;+\infty)$.

3. $\dfrac{23\pi}{36}+\pi k$, $\dfrac{35\pi}{36}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

4. $\dfrac{\sqrt{129}+31}{2}$. *Указание.* Пусть $\angle O_1AD=\alpha$ (рис.6). Тогда

$$\angle O_2AD=2\alpha$$

и

$$AN=\frac{8}{\operatorname{tg}2\alpha}<\frac{4}{\operatorname{tg}\alpha}=AM.$$

Пусть также $DM=u$, $DN=v$. Из подобия треугольников O_1DM и O_2DN следует, что $uv=32$. Кроме того, $u+v=$ $=FD+DE=\sqrt{129}$. Из этих соотношений следует, что $MN=$ $=u-v=1$. Исключая α из соотношений $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{8}{x}$, $\operatorname{tg}\alpha=$ $=\dfrac{4}{x+1}$, получим, что $x=15$, а $AD=x+v$.

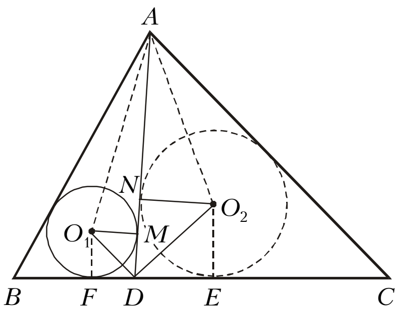

Рис. 6

5. $a\in[1;2)\cup(2;3]$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$3^{\left(t^2-1\right)(a-2)^2+1}-2=\frac{1}{|t|},$$

где $t=\dfrac{x+a}{a-2}$. При $a=2$ решений нет, а при $a\neq 2$ решениями служат $t=\pm1$ (убедитесь, что других решений нет).

6. $\dfrac{1}{6}V-\dfrac{2}{3}R^2V^3\left(\left(\dfrac{m^2-4R^2}{2}\right)^2-4mV\right)^{-2}$.

Указание. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. По условию $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{c}=\vec{c}\,\vec{a}=0$, $\vec{a}\,\vec{a}=a^2$, $\vec{b}\,\vec{b}=b^2$, $\vec{c}\,\vec{c}=c^2$, причем

$$\begin{cases}a+b+c=m,\\ a^2+b^2+c^2=4R^2,\\ abc=V.\end{cases}\qquad (*)$$

Введем обозначения

$$\frac{AM_1}{AB_1}=\alpha,\ \frac{A_1N_1}{A_1C_1}=\beta.$$

Тогда

$$V_1=V_{AA_1M_1N_1}=\alpha V_{AA_1B_1N_1}=\alpha\beta V_{AA_1B_1C_1}=\frac{\alpha\beta}{6}V.$$

Выразите α и β через a, b, c, получите затем выражение суммы объемов пирамид, после чего исключите a, b, c, пользуясь системой ($*$).

Вариант 4

1. $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right)<\dfrac{19\pi}{24}$. **2.** $\dfrac{2\pi}{3}+4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

3. $\left(-1;\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right]\cup\left(0;\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. *Указание.* После замены $t=\log_{x+1}|x-2|$ получаем

$$|2t+2|\geq -3-3t\Leftrightarrow t\geq -1.$$

4. $2\sqrt{3\sqrt2-4}$. *Указание.* Из условия следует, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием высоты пирамиды. Задача сводится к нахождению радиуса этой окружности.

5. $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l$, $\dfrac{\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение можно переписать в виде

$$(\operatorname{tg}14x+3\operatorname{ctg}14x)+\left(\sqrt2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)^2=2\sqrt3.$$

Оценивая выражение в первой скобке с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\operatorname{tg}14x>0$. Тогда

$$\operatorname{tg}14x+3\operatorname{ctg}14x\geq 2\sqrt3,$$

причем равенство достигается при

$$\operatorname{tg}14x=3\operatorname{ctg}14x\Rightarrow \operatorname{tg}14x=\sqrt3.$$

Таким образом, вся левая часть преобразованного уравнения не меньше $2\sqrt3$. Поэтому получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}14x=\sqrt3,\\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt2}.\end{cases}$$

При $\operatorname{tg}14x<0$ решений нет.

6. $\sqrt6-\sqrt2$. *Указание.* Положим $AC=x$, $BC=y$, $AB=z$. Тогда

$$\begin{cases}z=xy\sin75^\circ,\\ z^2=x^2+y^2-2xy\cos75^\circ,\\ x+y+z=4+\sqrt6-\sqrt2.\end{cases}$$

Так как

$$\sin75^\circ=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2},\ \cos75^\circ=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2},$$

эта система принимает вид

$$\begin{cases}xy=\dfrac{z}{\sin75^\circ},\\ z^2=(x+y)^2-2xy(1+\cos75^\circ),\\ x+y=4+4\cos75^\circ-z.\end{cases}$$

Исключая x, y, получаем

$$z^2=(4+4\cos75^\circ-z)^2-\frac{2z}{\sin75^\circ}(1+\cos75^\circ).$$

Отсюда

$$z=\frac{8\sin75^\circ(1+\cos75^\circ)}{1+4\sin75^\circ}=\frac{8\sin75^\circ+4\sin150^\circ}{4\sin75^\circ+1}=2.$$

По теореме синусов находим

$$R=\frac{z}{2\sin75^\circ}=\sqrt6-\sqrt2.$$

Вариант 5

1. πn, $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $\left(3+\sqrt{65}\right)/2$. **3.** $(-1;\ 0)$.

4. $5/2$. **5.** $x=1$; $y=3$.

6. $q(2p+q)/(p+q)$. *Указание.* Пусть $PQ=x$. Тогда

$$\frac{x}{q}=\frac{BP}{BM}.$$

Воспользуйтесь подобием треугольников AMP и BMC.

7. $a = -2$; $a = 1$. *Указание.* Уравнение равносильно совокупности $\cos x = a$, $\cos x = -a - 1$.

8. $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}a$. *Указание.* Пусть 2α – угол, образуемый секущей плоскостью с плоскостью основания, r – искомый радиус, M – точка касания шара с плоскостью $ABCD$. Тогда $BD = BM + MD = r\sqrt{2} + r\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 6

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $(-\infty; 3)\cup(21/5; +\infty)$.

3. 1. **4.** $x = \log_2 3$, $y = \log_3 2$. **5.** $\sqrt{5}$.

6. $\sqrt{c^2 - ab}$. *Указание*. Пусть $ON = x$, $CN = ND = y$ (рис.7). Тогда $a + y = b - y$ и $x^2 - y^2 = c^2 - (b-y)^2$.

7. $\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}$. *Указание.* Докажите, что сфера касается также плоскости ASB в точке B. Пусть O – ее центр. Плоскость OBC перпендикулярна ребру AS в точке E. Далее все вычисления удобно проводить в прямоугольном треугольнике OCE.

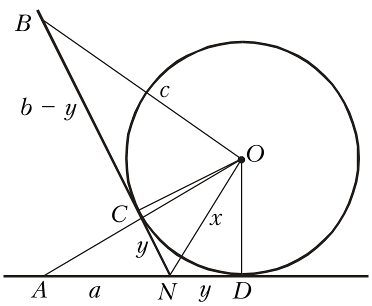

Рис. 7

8. $\left(-3^a; -1\right)\cup\left(1; 3^a\right)$ при $a \in (0; 0{,}5)$; $\left(-\infty; -3^a\right)\cup\left(3^a; +\infty\right)$ при $a \in (0{,}5; +\infty)$. Длина промежутка равна 6 при $a = 1$.

Вариант 7

1. $(-\infty; -2]\cup(-1; 0)\cup(0; +\infty)$. **2.** -5; -6; $-7\pi/4$.

3. $(-1/3; 0)\cup(0; 2)\cup(2; 3)$.

4. $\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Тогда $AB = 4\sin\alpha$, $BC = 6\sin\gamma$, а $AB = 2R\sin\gamma$, $bc = 2R\sin\alpha$, где R – радиус описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно,

$$AB\cdot BC = 24\sin\alpha\sin\gamma = 4R^2\sin\alpha\sin\gamma,$$

откуда $R = \sqrt{6}$, а $AC = 2R\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{6}$.

5. 24. *Указание.* Докажите, что параллелепипед прямоугольный. Если a, b, c – его ребра, то $abc = 8$, а $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Но в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 12$. Поэтому $a^2 = b^2 = c^2 = 4$.

6. $a = \pm 1$. *Указание.* Левая часть уравнения – четная функция. А такое уравнение может иметь нечетное число корней лишь тогда, когда 0 является его корнем.

7. $2^{1001} - 4$. *Указание.* Пусть $b_n = a_{2n+1} + 4$. Докажите, что $b_{n+1} = 2b_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Вариант 8

1. $\frac{(-1)^n}{3}\arcsin\frac{-3+\sqrt{29}}{8}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $(-\infty; -2]\cup[1/2; 1)\cup\left(1; \left(-3+\sqrt{73}\right)/4\right]$. **3.** -1.

4. $22/7$. *Указание.* Пользуясь подобием треугольников OGC и AOF, докажите, что точки F, O и G лежат на одной прямой.

5. $[5/6; 1)\cup(1; 3/2]$. *Указание.* Левая часть неравенства равна $-(y-1)^2 g(x)$, где $g(x)$ – квадратный трехчлен от x, коэффициенты которого зависят от y. При $y \ne 1$, $y > \frac{1}{2}$ исходное неравенство выполняется при всех $x \in (1; 2y)$ тогда и только тогда, когда $g(1) \le 0$, $g(2y) \le 0$.

6. 7 : 5. *Указание.* Примем за единицу времени промежуток между соседними встречами велосипедистов, а за единицу длины – длину одного витка трассы. Пусть x и y – скорости первого и второго велосипедистов, тогда $x + y = 1$, а $m = 12x$ – целое число. Число m не делится ни на 2, ни на 3. Рассмотрите все оставшиеся возможности и убедитесь в том, что $m = 7$.

Вариант 9

1. 3. **2.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\pm 1/\sqrt{2}$.

4. $y \ge 0$. **5.** $2/3$ л. **6.** $\sqrt{6}/12$.

7. $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$ при $b \le -1$; $\left(-1/\sqrt{1-b^2}; -1\right]\cup[1; +\infty)$ при $-1 < b \le 0$.

Вариант 10

1. $(-3; -2)\cup(-2; 3]$. **2.** $A = 2 > 1{,}999$. **3.** $1+\frac{\pi}{2}$.

4. 90°, 25°, 65°. **5.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. $n = 6$; $S_6 = -66$. *Указание.* Сумма n первых членов арифметической прогрессии – квадратичная функции от n.

7. 384. **8.** $\left(-\frac{1+\sqrt{167}}{2}; -\frac{13}{2}\right]\cup\left[5; \frac{-1+\sqrt{167}}{2}\right)\cup\{-2\pi\}\cup\{0\}$.

Вариант 11

1. 5. **2.** $2+\sqrt{3}$. **3.** $9/7$. **4.** $\pm 1/6$, $\pm\sqrt{2}/6$.

5. $3/2$. *Указание.* Докажите что $AD \parallel BC$.

6. $50\sqrt{2}$. *Указание.* Сначала заметим, что

$$DA_1\cdot DA_2 = DC_1\cdot DC_2 = DB_1\cdot DB_2,$$

а

$$S_{DC_2B_2} : S_{DA_2B_2} = S_{DA_1B_1} : S_{DC_1B_1},$$

откуда $S_{DC_2B_2} = 50$. Аналогично, $S_{DA_2C_2} = 30$. Кроме того, докажите, что $S_{A_2B_2C_2} = \sqrt{S^2_{DA_2B_2} + S^2_{DA_2C_2} + S^2_{DB_2C_2}}$.

Вариант 12

1. $\left(13-\sqrt{21}\right)/2$.

2. Первый член 1 или 4, разность равна $-1/5$.

3. 1) $5/2$; 2) $324/25$.

4. Сначала следует выступить в газете, а затем 2 раза на радио и 1 раз на телевидении.

5. $(-\infty; -4)\cup\{0; 2\}\cup(4; +\infty)$.

6. $a \in (-\infty; -1]\cup\{0\}\cup(2; +\infty)$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\left(16\arcsin^{-4}(x+3a)\right) \ge 0,$$

а это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} ax(x+2a) > 0, \\ -1 \le x + 3a \le 1, \\ x + 3a \ne 0. \end{cases}$$

Вариант 13

1. $(-3; -2)\cup(3; 4]$. **2.** $(0; 3]$. **3.** 24 дня.

4. $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$. *Указание.* Через точку C проведите прямую, параллельную BD и пересекающую AB в точке E. Площадь трапеции равна площади треугольника ACE.

5. $-\frac{\pi}{26}$; $\frac{\pi}{34}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\frac{9}{12}\le x\le\frac{\pi}{12},\\ \cos 15x-\sin 12x=0.\end{cases}$$

6. $\frac{d^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2 2\beta}$. *Указание.* Пусть O – центр сферы, M – середина AS. Тогда $OM=\frac{d}{2}$, $AC=d$. Аналогично, $BC=d$. При отыскании высоты SH данной пирамиды докажите, что точка H лежит на продолжении высоты CP треугольника ABC за точку C.

7. При $b=-\frac{1}{2\sqrt2}$ – единственное решение $\left(\frac{1}{\sqrt5};0;0\right)$. При $b=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}$ – два решения: $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}};1;\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}};-1;-\frac{\pi}{4}\right)$.

Указание. Второе уравнение исходной системы равносильно тому, что $y=\operatorname{tg}z$, $|z|<\pi/2$, а первое уравнение имеет вид $f(x)=g(z)$, где $f(x)=-\log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right)$, $g(z)=b^2+$ $+b\sin 2|z|$. Пусть E_f и E_g – области значений функций f и g. Для того чтобы уравнение $f(x)=g(z)$ имело конечное число решений, необходимо, чтобы $E_f\cap E_g$ состояло из единственной точки.

Вариант 14

1. $\left(\frac47;\frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$. **2.** $7^{\log_2\left(\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)}$.

3. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k,n\in\boldsymbol{Z}$.

4. $p=9$; $[-1;3]$. **5.** $1820\sqrt{21}/341$.

6. $a\in(5/11;6/13]$. *Указание.* Из первого уравнения получаем $y=6x+7+\frac{12}{2x-3}$, откуда x может равняться 1, 2, или 3, а y, соответственно, 1, 31 и 29. Осталось подставить найденные пары в неравенство исходной системы и выяснить, при каких a ровно 5 натуральных чисел z дают вместе с x и y решения задачи.

Вариант 15

1. $\frac23$. **2.** $(-\infty;-9)\cup\left(\frac23;1\right)\cup\left[\frac{11}{2};+\infty\right)$. **3.** 15.

4. $\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

5. $y=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{6}k+\pi n$, $z=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k,n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из первого уравнения следует, что

$$\cos\left(z+4y+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(2z+2y-\frac{\pi}{4}\right)=\pm1.$$

Аналогично, из второго уравнения получаем

$$\cos\left(3z+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(4z-2y-\frac{\pi}{4}\right)=\pm1,$$

после чего приходим к системе

$$\begin{cases}z+4y+\frac{\pi}{4}=\pi k_1,\\ 2z+2y-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+\pi k_2,\\ 3z+\frac{\pi}{4}=\pi k_3,\\ 4z-2y-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+\pi k_4,\end{cases}$$

где k_1, k_2, k_3, $k_4\in\boldsymbol{Z}$, причем k_1 и k_2, а также k_3 и k_4 имеют одинаковую четность.

Вариант 16

1. 1; $\frac{30-\sqrt{10}}{20}$. **2.** $A=1>\frac57$.

3. $\frac{\pi}{5}k$, $\pm\frac12\arccos\frac{3-\sqrt{17}}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

4. $\sqrt3\sin\frac{10\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}$. **5.** $(-\infty;-11)\cup\left[\sqrt5;3\right)$.

6. $2\left(\sqrt3-1\right)$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный, $DC\perp O_1O_2$ и $O_1D^2=O_1C\cdot O_1O_2$.

7. $\left(3;\sqrt2\right)$. *Указание.* Вычитая из утроенного второго неравенства первое, получаем следствие

$$(x-3)^2+\left(y^2-2\right)^2\le0.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Из закона сохранения импульса следует, что скорость шайбы непосредственно после щелчка $u_ш$, ее скорость $v_ш$ и скорость доски $v_д$ в момент соскальзывания шайбы должны удовлетворять соотношению

$$mu_ш=Mv_д+mv_ш, \tag{1}$$

где m – масса шайбы, а M – масса доски. Учитывая, что перемещение шайбы относительно доски к моменту соскальзывания не зависит от ее начальной скорости, на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что

$$\frac{mu_ш^2}{2}=\frac{Mv_д^2}{2}+\frac{mv_ш^2}{2}+A, \tag{2}$$

где A – работа сил трения. Из равенств (1) и (2) при $u_ш=u$ и $M/m=k$ получим

$$\frac{2A}{m}=\frac{k}{k+1}u^2. \tag{3}$$

При $u_ш=nu$ из соотношений (1) – (3) следует, что искомая скорость доски должна удовлетворять уравнению

$$k(k+1)v_д^2-2nkuv_д+ku^2/(k+1)=0.$$

Очевидно, что при $n\to\infty$ время взаимодействия шайбы с доской должно стремиться к нулю; следовательно, искомая скорость доски по мере увеличения n (после того, как оно превысит некоторое критическое значение) должна уменьшаться (в пределе до нуля). Поэтому из двух возможных решений полученного квадратного уравнения условиям задачи удовлетворяет корень

$$v_д=u\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{k+1}.$$

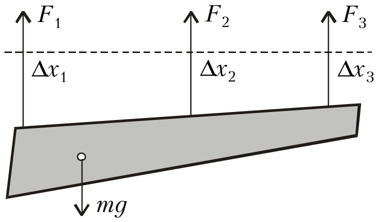

Рис. 8

2. Ясно, что ответ на поставленный вопрос зависит от характера движения балки. Поскольку в условии задачи нет никаких специальных оговорок о характере движения балки, решать задачу следует в предположении, что балка остается неподвижной относительно точек крепления шнуров к потолку. На рисунке 8 показаны силы, действующие на балку: это силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ со стороны удерживающих ее шнуров и сила тяжести $m\vec{g}$, где m – масса балки. Ускорение центра масс балки будет равно нулю, если

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg\,.$$

При этом балка будет находиться в равновесии, если сумма моментов всех сил относительно любой оси будет равна нулю. Если в качестве оси выбрать прямую, проходящую через точку крепления первого шнура к балке перпендикулярно плоскости, в которой лежат действующие на нее силы, то условие отсутствия углового ускорения у балки должно иметь вид

$$L_1F_2 + \left(L_1 + L_2\right)F_3 = Lmg\,.$$

Чтобы получить полную систему уравнений, необходимо учесть упругие свойства шнуров. Так как деформации шнуров по условию являются малыми, на основании закона Гука можно утверждать, что силы упругости шнуров F_i пропорциональны деформациям шнуров Δx_i. Отсюда и из рисунка 8 следует соотношение

$$\frac{L_1 + L_2}{L_2} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_3}{\Delta x_2 - \Delta x_3} = \frac{F_1 - F_3}{F_2 - F_3}\,.$$

Решая совместно три полученных уравнения, найдем искомое отношение сил:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2L_1^2 + \left(2L_1 + L_2\right)\left(L_2 - L\right)}{L_1\left(L_2 + L\right) + L_2\left(L_2 - L\right)}\,.$$

3. Колебания колеса с грузом будут оставаться гармоническими до тех пор, пока не возникнет скольжение груза по колесу. Очевидно, что в положении равновесия груз должен находится на одной вертикали с осью обода. При смещении из этого положения проекция силы тяжести груза на направление касательной к ободу становится отличной от нуля, и, для того чтобы груз не скользил по ободу, между грузом и ободом должна действовать сила трения покоя. Максимальная величина этой силы равна произведению коэффициента трения на величину нормальной составляющей силы реакции. Если радиус, проведенный в точку нахождения груза, образует с вертикалью угол α (причем $|\alpha| < \pi/2$) и груз имеет при этом скорость v, то на основании второго закона Ньютона величина нормальной составляющей равна $N = \left(v^2/R + g\cos\alpha\right)m$, где m – масса груза. Отсюда следует, что N тем меньше, чем меньше v и больше угол α, т.е. N достигает минимального значения при максимальном отклонении груза от положения равновесия. В этом положении проекция силы тяжести груза на направление касательной к ободу равна $mg\sin\alpha_{\max}$. Следовательно, груз не будет скользить по ободу, если $\mu \ge \operatorname{tg}\alpha_{\max}$, или, поскольку $\mu \ll 1$, если $\alpha_{\max} = \mu$. При гармонических колебаниях скорость тела достигает максимума в момент прохождения им положения равновесия, поэтому искомую скорость можно определить на основании закона сохранения механической энергии:

$$\Delta W_{\text{п}} = mgR\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right) = mgR\alpha_{\max}^2/2 = \Delta W_{\text{к}} = (m+M)v_{\max}^2/2\,,$$

откуда

$$v_{\max} = \mu\sqrt{mgR/(m+M)}\,.$$

4. При достаточно медленном наполнении цилиндра сила давления гелия на поршень должна быть равна сумме действующих на него сил атмосферного давления и трения скольжения:

$$p_0S = F_{\text{атм}} + F_{\text{тр}}\,,$$

где p_0 – давление гелия непосредственно перед его нагреванием, а S – площадь поперечного сечения цилиндра. Поскольку величина силы трения скольжения равна максимальному значению силы трения покоя, не зависит ни от температуры цилиндра, ни от положения поршня в нем и после закрытия крана число ν молей гелия в цилиндре под поршнем не изменяется, при нагревании давление в цилиндре должно оставаться неизменным, а объем гелия должен увеличиваться. Пусть температура гелия непосредственно перед нагреванием T_0, перед охлаждением $T_{\max}$, а в тот момент, когда поршень начинает двигаться после некоторого охлаждения гелия, $T_{\text{к}}$. Тогда можно записать

$$p_0V_0 = \nu RT_0,\ p_0V_{\max} = \nu RT_{\max},\ p_{\text{к}}V_{\max} = \nu RT_{\text{к}}\,,$$

где V_0 и $V_{\max}$ – объемы гелия до и после нагревания, R – универсальная газовая постоянная. При этом давление гелия непосредственно перед началом движения поршня при охлаждении равно $p_{\text{к}} = \left(F_{\text{атм}} - F_{\text{тр}}\right)/S$, так как направление силы трения покоя к этому моменту должно стать противоположным направлению силы атмосферного давления, а ее величина вновь принять максимальное значение. Поскольку гелий является одноатомным газом, его молярная теплоемкость при изохорическом процессе равна $C_V = 1{,}5R$, а при изобарическом – $C_p = 2{,}5R$. Отсюда следует, что при нагревании гелий должен был получить количество теплоты $Q_+ = 2{,}5\nu R\left(T_{\max} - T_0\right)$, а при охлаждении отдать $Q_- = 1{,}5\nu R\left(T_{\max} - T_{\text{к}}\right)$. Учитывая, что $V_{\max}/V_0 = k$ и $Q_+/Q_- = n$, найдем отношение давлений:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = 1 - \frac{5(k-1)}{3nk}\,,$$

а затем и искомое отношение сил:

$$\frac{F_{\text{тр}}}{F_{\text{атм}}} = \frac{1 - p_{\text{к}}/p_0}{1 + p_{\text{к}}/p_0} = \frac{5(k-1)}{6nk - 5(k-1)} = 0{,}2\,.$$

5. Очевидно, что в тот момент, когда температура льда стала равной 0 °С, давление насыщенного пара воды должно было стать равным атмосферному: $p_{\text{н}}(0) = p_{\text{атм}} = 1$ атм, а потому температура пара $T(0) = 373$ К. Из уравнения Клапейрона – Менделеева найдем число молей пара, находившегося в цилиндре в указанный момент времени: $\nu(0) = p_{\text{атм}}V/\left(RT(0)\right)$. Как известно, любая система по прошествии достаточного промежутка времени (при фиксированных внешних условиях) самопроизвольно переходит в состояние термодинамического равновесия, при котором все части системы имеют одну и ту же температуру. Поскольку теплообмен пара и льда со всеми другими телами исключен, за счет теплообмена со льдом пар будет конденсироваться, а лед будет плавиться. При этом давление в цилиндре будет оставаться равным 1 атм. Если количество пара $\nu(0)$ было достаточно малым, то он весь сконденсируется, и искомое перемещение поршня следует считать равным $\Delta h = V/S$. В противном случае произойдет лишь частичная конденсация пара, а образовавшаяся вода будет имеет температуру 100 °С. Уравнение теплового баланса для этого случая можно записать в виде $L\Delta\nu = (\lambda + 100C)m/\text{М}$, где $\Delta\nu$ – количество молей сконденсировавшегося пара. Определив из уравнения теплового баланса число молей сконденсировавшегося пара, а из уравнения Клапейрона – Менделеева изменение объема пара, найдем искомое перемещение поршня во втором случае. Объединяя оба случая и учитывая, что $\Delta\nu \le \nu(0)$, искомое перемещение поршня можно представить в виде

$$h = \begin{cases} \dfrac{V}{S} \text{ при } (\lambda + 100C)m = k > \dfrac{p_{\text{атм}} VL\text{M}}{RT(0)} = b, \\ \dfrac{(\lambda + 100C)RT(0)m}{\text{M}p_{\text{атм}}SL} \text{ при } k < b, \end{cases}$$

или, подставив значения $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), М = =18 г/моль, $p_{\text{атм}} = 1$ атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па и $T(0) = 373$ К,

$$h = \begin{cases} \dfrac{V}{S} \text{ при } k > 0{,}59VL, \\ 1{,}7\dfrac{(\lambda + 100C)m}{SL} \text{ при } k < 0{,}59VL. \end{cases}$$

6. Как известно, избыточный статический заряд располагается на поверхности проводника. Если обозначить величину заряда поверхности пластины, находящейся на расстоянии a от одной из обкладок конденсатора, q_{1a}, а заряд другой поверхности обозначить q_{2a}, то по условию задачи $q = q_{1a} + q_{2a}$. На обращенных к пластине поверхностях обкладок конденсатора (в силу явления электростатической индукции) должны появиться заряды $-q_{1a}$ и $-q_{2a}$. Таким образом, между обкладками и пластиной возникают электрические поля, напряженности которых равны $E_{1a} = q_{1a}/(\varepsilon_0 S)$ и $E_{2a} = q_{2a}/(\varepsilon_0 S)$. Соответственно, разности потенциалов между обкладками и заряженной пластиной равны $\Delta\varphi_{1a} = aE_{1a}$ и $\Delta\varphi_{2a} = (d-a)E_{2a}$. Поскольку пластины по условию соединены проводником, эти разности потенциалов должны быть равны друг другу, откуда получим

$$q_{1a} = (1 - a/d)q, \quad q_{2a} = aq/d.$$

Видно, что при изменении положения заряженной пластины внутри конденсатора должно происходить перераспределение зарядов как между поверхностями пластины, так и между обкладками конденсатора. При этом должны изменяться напряженности полей внутри конденсатора, а значит, и энергия, соответствующая этим полям. Очевидно, что такое изменение может произойти только за счет работы внешних сил, под действием которых происходит перемещение пластины. Ясно также, что перераспределение зарядов – их упорядоченное движение – в общем случае должно сопровождаться выделением тем большего количества теплоты и тем более интенсивным излучением, чем больше скорость упорядоченного движения зарядов. Следовательно, работа внешних сил будет минимальной, если перемещение пластины будет происходить бесконечно медленно. На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что искомая работа A должна удовлетворять уравнению

$$\frac{q_{1a}^2}{2C_{1a}} + \frac{q_{2a}^2}{2C_{2a}} + A = \frac{q_{1b}^2}{2C_{1b}} + \frac{q_{2b}^2}{2C_{2b}},$$

где C_{1a} и C_{1b} – емкости конденсатора, образованного пластиной и обкладкой, находящейся от нее на расстояниях a и b соответственно, а C_{2a} и C_{2b} – емкости конденсатора, образованного пластиной и второй обкладкой. Учитывая, что емкость плоского воздушного конденсатора с площадью каждой пластины S и расстоянием между ними d равна $C = \varepsilon_0 S/d$, из последнего уравнения получаем

$$A = \frac{q^2(b-a)(d-a-b)}{2\varepsilon_0 Sd}.$$

7. Как известно, гальванический элемент состоит из двух изготовленных из разных проводников электродов, погруженных в электролит. ЭДС гальванического элемента определяется разностью электрохимических потенциалов его электродов, а при подключении к элементу нагрузки ток через электролит обусловлен упорядоченным движением только ионов. Поэтому на основании закона Фарадея для электролиза можно утверждать, что скорость растворения отрицательного электрода при подключении к элементу нагрузки должна быть прямо пропорциональна величине текущего через элемент тока. Следовательно, для ответа на поставленный вопрос необходимо найти отношение токов при указанных способах подключения резисторов.

Если ЭДС элемента $\mathcal{E}$, сопротивление первого резистора R_1, а второго R_2, то при последовательном соединении резисторов и источника через каждый из них должен протекать ток

$$I_{\text{пс}} = \frac{\mathcal{E}}{(1+n)R_1 + R_2}.$$

При этом на втором резисторе должна выделяться тепловая мощность $Q_2 = I_{\text{пс}}^2 R_2$. Поскольку эта мощность должна быть максимальной, можно определить величину R_2, приравнивая нулю первую производную Q_2 по R_2. Вычисления дают $R_2 = (n+1)R_1$.

В случае соединенных параллельно резисторов ток через элемент равен

$$I_{\text{пр}} = \frac{\mathcal{E}}{nR_1 + R_1R_2/(R_1 + R_2)} = \frac{(n+2)\mathcal{E}}{((n+3)n+1)R_1}.$$

Тогда искомое отношение, равное отношению токов, будет равно

$$x = \frac{(n+3)n+1}{2(n+1)(n+2)}.$$

8. Поскольку стержень находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально, а сам располагается горизонтально, во время $(-\tau \le t \le 0)$ протекания тока I на стержень должна действовать сила Ампера, равная $F_{\text{А}} = IBL$ и направленная горизонтально перпендикулярно его оси. Так как величина импульса силы Ампера равна

$$\int_{-\tau}^{0} F_{\text{А}} dt = \int_{-\tau}^{0} I(t)BLdt = BLq,$$

на основании закона изменения импульса получаем, что к моменту $t = 0$ окончания протекания заряда все точки стержня приобретут скорость $v_0 = BLq/m$ и в дальнейшем будут (подобно грузику математического маятника при малых амплитудах) совершать гармонические колебания с угловой частотой $\omega = \sqrt{g/H}$. Следовательно, зависимость от времени угла α отклонения нитей подвеса от вертикали будет иметь вид $\alpha(t) = \alpha_0 \sin\omega t$. Проекция скорости точки, движущейся по окружности радиусом H с угловой скоростью $d\alpha/dt = \alpha'(t)$, на положительное направление касательной к ее траектории равна $v_{\text{к}} = H\alpha'(t)$, тогда зависимость вертикальной составляющей скорости от времени можно представить в виде $v_{\text{в}}(t) = v_{\text{к}}(t)\sin\alpha(t) = v_{\text{к}}(t)\alpha(t)$, т.к. $\alpha(t) \ll 1$. Отсюда, учитывая ранее найденные значения угловой частоты колебаний и амплитуды скорости, найдем искомое максимальное значение вертикальной составляющей скорости стержня:

$$v_{\text{в}\max} = \frac{v_0^2}{2\omega H}(\sin 2\omega t)_{\max} = \frac{(BLq)^2}{2m^2\sqrt{gH}}.$$

9. Будем решать эту задачу, полагая, что лупу можно считать тонкой собирающей линзой, для которой справедлива формула $1/d + 1/f = 1/F$, где d – расстояние от линзы до точки предмета, изображение которой находится от линзы на расстоянии f, а F – фокусное расстояние линзы. Поскольку в первом случае изображение нити на рисунке действительное, обозначив расстояние от линзы до лампочки через H, из формулы линзы получим $F = bH/(b+H) \approx b$ (расстояние от линзы до лампочки, которая висит под потолком комнаты, явно не меньше 1 м, т.е. значительно больше $b = 5$ см). Во втором

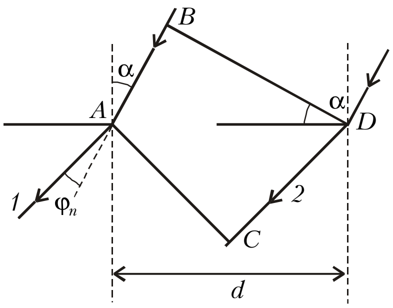

Рис. 9

случае расстояние от линзы до воспринимаемого человеком изображения рисунка равно расстоянию наилучшего зрения D = 25 см, изображение рисунка является мнимым, а сам рисунок находится от лупы на расстоянии

$$d = FD/(F+D) \approx$$
$$\approx bD/(b+D).$$

Отсюда найдем искомое увеличение рисунка:

$$\Gamma = \frac{D}{d} \approx 1 + \frac{D}{b} = 6.$$

10. Используя обозначения на рисунке 9, найдем, что разность хода идущих в направлении на n-й максимум лучей *1* и *2* равна $\Delta = CD - AB = d(\sin(\alpha + \varphi_n) - \sin\alpha)$. В то же время эта разность хода должна быть равна $n\lambda$. Если угол между направлением падающего пучка и направлением на первый максимум обозначить φ_1, получим

$$\lambda_{с} = d\sin(\alpha + \varphi_1 + \Delta\varphi) - \sin(\alpha + \varphi_1),$$

или, учитывая малость углов φ_1 и $\Delta\varphi$,

$$\lambda_{с} = d\cos\alpha \cdot \Delta\varphi.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что угловое расстояние $\delta\varphi$ между направлениями на максимумы третьего порядка желтого дублета ртути должно удовлетворять уравнению

$$3\delta\lambda_{ж} = d\cos\alpha \cdot \delta\varphi.$$

Решая совместно два последних уравнения, определим искомую разность длин волн:

$$\delta\lambda_{ж} = \lambda_{с}\delta\varphi/(3\Delta\varphi) = 2{,}1 \text{ нм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $v_0 = \sqrt{2(H-h)(g-a)} = 6$ м/с.

2. $l_1 = \dfrac{(M-m)l_0 + 2ml}{M+m} = 14$ см.

3. $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2\varphi} \approx 1{,}01$ Н.

4. $A = \dfrac{mg}{4}\dfrac{L^2 + 4(H-h)^2}{H-h} = 8$ Дж.

5. $\alpha = 1/2$, кинетическая энергия уменьшится в 2 раза.

6. $A = \dfrac{R(T-T_1)^2}{T_1} \approx 11{,}07$ Дж.

7. $U_{MN} = \dfrac{\mathcal{E}R}{R+3r} \approx 1{,}54$ В.

8. $B = E\sqrt{\dfrac{m}{2W_к}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ Тл, магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка и направлено на читателя.

9. $\gamma = 2\alpha - 2\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\sin\alpha\right) = 30°$.

10. $r = R\left(\dfrac{b}{F} - \dfrac{b}{d} - 1\right) = 1$ см.

Химический факультет

1. $\mu = \dfrac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$. **2.** $T = (m_2 - m_1)g/2 = 1$ Н.

3. $\nu = \nu_0(v+u)/u = 1{,}75$ Гц. **4.** $Q = mg(H - g\Delta t^2/8) = 2$ Дж.

5. $p = 2p_1p_2/(p_1+p_2) = 2{,}4 \cdot 10^5$ Па.

6. $q_3 = \mathcal{E}C_3(C_1+C_2)/(C_1+C_2+C_3) = 9$ мкКл.

7. $n^+ = n\mathrm{M}/(\rho N_А) \approx 6{,}6 \cdot 10^{-10}$. **8.** $r = U_д^2/(2P) - R = 8$ Ом.

9. $E = \sqrt{\left(\dfrac{a}{q/m}\right)^2 - (vB)^2} = 8$ кВ/м.

10. $d_1 - d_2 = 2/(\Gamma D) = 0{,}1$ м.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://www.techno.ru/vivovoco

(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Ю.А.Ващенко, В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области Заказ №