5. $-\frac{\pi}{26}$; $\frac{\pi}{34}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\frac{9}{12} \le x \le \frac{\pi}{12},\\ \cos 15x - \sin 12x = 0.\end{cases}$$

6. $\frac{d^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2 2\beta}$. *Указание.* Пусть O – центр сферы, M – середина AS. Тогда $OM = \frac{d}{2}$, $AC = d$. Аналогично, $BC = d$. При отыскании высоты SH данной пирамиды докажите, что точка H лежит на продолжении высоты CP треугольника ABC за точку C.

7. При $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ – единственное решение $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\, 0;\, 0\right)$. При $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ – два решения: $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}};\, 1;\, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}};\, -1;\, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Указание. Второе уравнение исходной системы равносильно тому, что $y = \operatorname{tg} z$, $|z| < \pi/2$, а первое уравнение имеет вид $f(x) = g(z)$, где $f(x) = -\log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right)$, $g(z) = b^2 + b\sin 2|z|$. Пусть E_f и E_g – области значений функций f и g. Для того чтобы уравнение $f(x) = g(z)$ имело конечное число решений, необходимо, чтобы $E_f \cap E_g$ состояло из единственной точки.

Вариант 14

1. $\left(\frac{4}{7};\, \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$. **2.** $7^{\log_2\left(\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)}$.

3. $\left(\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\, (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\, (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $p = 9$; $[-1;\, 3]$. **5.** $1820\sqrt{21}/341$.

6. $a \in (5/11;\, 6/13]$. *Указание.* Из первого уравнения получаем $y = 6x + 7 + \frac{12}{2x-3}$, откуда x может равняться 1, 2, или 3, а y, соответственно, 1, 31 и 29. Осталось подставить найденные пары в неравенство исходной системы и выяснить, при каких a ровно 5 натуральных чисел z дают вместе с x и y решения задачи.

Вариант 15

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $(-\infty;\, -9)\cup\left(\frac{2}{3};\, 1\right)\cup\left[\frac{11}{2};\, +\infty\right)$. **3.** 15.

4. $\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. $y = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6}k + \pi n$, $z = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из первого уравнения следует, что

$$\cos\left(z + 4y + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2z + 2y - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1.$$

Аналогично, из второго уравнения получаем

$$\cos\left(3z + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(4z - 2y - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1,$$

после чего приходим к системе

$$\begin{cases} z + 4y + \frac{\pi}{4} = \pi k_1,\\ 2z + 2y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi k_2,\\ 3z + \frac{\pi}{4} = \pi k_3,\\ 4z - 2y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi k_4,\end{cases}$$

где k_1, k_2, k_3, $k_4 \in \boldsymbol{Z}$, причем k_1 и k_2, а также k_3 и k_4 имеют одинаковую четность.

Вариант 16

1. 1; $\frac{30-\sqrt{10}}{20}$. **2.** $A = 1 > \frac{5}{7}$.

3. $\frac{\pi}{5}k$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{17}}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\sqrt{3}\sin\frac{10\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}$. **5.** $(-\infty;\, -11)\cup\left[\sqrt{5};\, 3\right)$.

6. $2\left(\sqrt{3}-1\right)$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный, $DC \perp O_1O_2$ и $O_1D^2 = O_1C \cdot O_1O_2$.

7. $\left(3;\, \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Вычитая из утроенного второго неравенства первое, получаем следствие

$$(x-3)^2 + \left(y^2 - 2\right)^2 \le 0.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Из закона сохранения импульса следует, что скорость шайбы непосредственно после щелчка $u_{ш}$, ее скорость $v_{ш}$ и скорость доски $v_{д}$ в момент соскальзывания шайбы должны удовлетворять соотношению

$$mu_{ш} = Mv_{д} + mv_{ш}, \qquad (1)$$

где m – масса шайбы, а M – масса доски. Учитывая, что перемещение шайбы относительно доски к моменту соскальзывания не зависит от ее начальной скорости, на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что

$$\frac{mu_{ш}^2}{2} = \frac{Mv_{д}^2}{2} + \frac{mv_{ш}^2}{2} + A, \qquad (2)$$

где A – работа сил трения. Из равенств (1) и (2) при $u_{ш} = u$ и $M/m = k$ получим

$$\frac{2A}{m} = \frac{k}{k+1}u^2. \qquad (3)$$

При $u_{ш} = nu$ из соотношений (1) – (3) следует, что искомая скорость доски должна удовлетворять уравнению

$$k(k+1)v_{д}^2 - 2nkuv_{д} + ku^2/(k+1) = 0.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ время взаимодействия шайбы с доской должно стремиться к нулю; следовательно, искомая скорость доски по мере увеличения n (после того, как оно превысит некоторое критическое значение) должна уменьшаться (в пределе до нуля). Поэтому из двух возможных решений полученного квадратного уравнения условиям задачи удовлетворяет корень

$$v_{д} = u\frac{n - \sqrt{n^2-1}}{k+1}.$$