Воспользуйтесь подобием треугольников AMP и BMC.

7. $a = -2$; $a = 1$. *Указание.* Уравнение равносильно совокупности $\cos x = a$, $\cos x = -a - 1$.

8. $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}a$. *Указание.* Пусть 2α – угол, образуемый секущей плоскостью с плоскостью основания, r – искомый радиус, M – точка касания шара с плоскостью $ABCD$. Тогда $BD = BM + MD = r\sqrt{2} + r\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 6

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $(-\infty; 3)\cup(21/5; +\infty)$.

3. 1. **4.** $x = \log_2 3$, $y = \log_3 2$. **5.** $\sqrt{5}$.

6. $\sqrt{c^2 - ab}$. *Указание.* Пусть $ON = x$, $CN = ND = y$ (рис.7). Тогда $a + y = b - y$ и $x^2 - y^2 = c^2 - (b - y)^2$.

7. $\arccos\frac{\sqrt{13} - 1}{4}$. *Указание.* Докажите, что сфера касается также плоскости ASB в точке B. Пусть O – ее центр. Плоскость OBC перпендикулярна ребру AS в точке E. Далее все вычисления удобно проводить в прямоугольном треугольнике OCE.

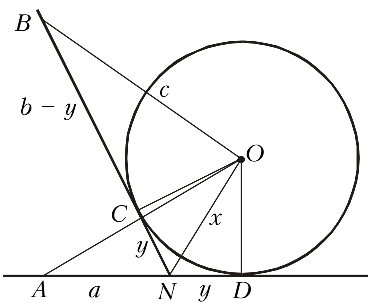

Рис. 7

8. $(-3^a; -1)\cup(1; 3^a)$ при $a \in (0; 0{,}5)$; $(-\infty; -3^a)\cup(3^a; +\infty)$ при $a \in (0{,}5; +\infty)$.

Длина промежутка равна 6 при $a = 1$.

Вариант 7

1. $(-\infty; -2]\cup(-1; 0)\cup(0; +\infty)$. **2.** -5; -6; $-7\pi/4$.

3. $(-1/3; 0)\cup(0; 2)\cup(2; 3)$.

4. $\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Тогда $AB = 4\sin\alpha$, $BC = 6\sin\gamma$, а $AB = 2R\sin\gamma$, $bc = 2R\sin\alpha$, где R – радиус описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно,

$$AB \cdot BC = 24\sin\alpha\sin\gamma = 4R^2\sin\alpha\sin\gamma,$$

откуда $R = \sqrt{6}$, а $AC = 2R\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{6}$.

5. 24. *Указание.* Докажите, что параллелепипед прямоугольный. Если a, b, c – его ребра, то $abc = 8$, а $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Но в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 12$. Поэтому $a^2 = b^2 = c^2 = 4$.

6. $a = \pm 1$. *Указание.* Левая часть уравнения – четная функция. А такое уравнение может иметь нечетное число корней лишь тогда, когда 0 является его корнем.

7. $2^{1001} - 4$. *Указание.* Пусть $b_n = a_{2n+1} + 4$. Докажите, что $b_{n+1} = 2b_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Вариант 8

1. $\frac{(-1)^n}{3}\arcsin\frac{-3 + \sqrt{29}}{8} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $(-\infty; -2]\cup[1/2; 1)\cup\left(1; \left(-3 + \sqrt{73}\right)/4\right]$. **3.** -1.

4. $22/7$. *Указание.* Пользуясь подобием треугольников OGC и AOF, докажите, что точки F, O и G лежат на одной прямой.

5. $[5/6; 1)\cup(1; 3/2]$. *Указание.* Левая часть неравенства равна $-(y - 1)^2 g(x)$, где $g(x)$ – квадратный трехчлен от x, коэффициенты которого зависят от y. При $y \ne 1$, $y > \frac{1}{2}$ исходное неравенство выполняется при всех $x \in (1; 2y)$ тогда и только тогда, когда $g(1) \le 0$, $g(2y) \le 0$.

6. 7 : 5. *Указание.* Примем за единицу времени промежуток между соседними встречами велосипедистов, а за единицу длины – длину одного витка трассы. Пусть x и y – скорости первого и второго велосипедистов, тогда $x + y = 1$, а $m = 12x$ – целое число. Число m не делится ни на 2, ни на 3. Рассмотрите все оставшиеся возможности и убедитесь в том, что $m = 7$.

Вариант 9

1. 3. **2.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\pm 1/\sqrt{2}$.

4. $y \ge 0$. **5.** $2/3$ л. **6.** $\sqrt{6}/12$.

7. $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$ при $b \le -1$; $\left(-1/\sqrt{1 - b^2}; -1\right]\cup[1; +\infty)$ при $-1 < b \le 0$.

Вариант 10

1. $(-3; -2)\cup(-2; 3]$. **2.** $A = 2 > 1{,}999$. **3.** $1 + \frac{\pi}{2}$.

4. 90°, 25°, 65°. **5.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. $n = 6$; $S_6 = -66$. *Указание.* Сумма n первых членов арифметической прогрессии – квадратичная функции от n.

7. 384. **8.** $\left(-\frac{1 + \sqrt{167}}{2}; -\frac{13}{2}\right]\cup\left[5; \frac{-1 + \sqrt{167}}{2}\right)\cup\{-2\pi\}\cup\{0\}$.

Вариант 11

1. 5. **2.** $2 + \sqrt{3}$. **3.** $9/7$. **4.** $\pm 1/6$, $\pm\sqrt{2}/6$.

5. $3/2$. *Указание.* Докажите что $AD \parallel BC$.

6. $50\sqrt{2}$. *Указание.* Сначала заметим, что

$$DA_1 \cdot DA_2 = DC_1 \cdot DC_2 = DB_1 \cdot DB_2,$$

а

$$S_{DC_2B_2} : S_{DA_2B_2} = S_{DA_1B_1} : S_{DC_1B_1},$$

откуда $S_{DC_2B_2} = 50$. Аналогично, $S_{DA_2C_2} = 30$. Кроме того, докажите, что $S_{A_2B_2C_2} = \sqrt{S^2_{DA_2B_2} + S^2_{DA_2C_2} + S^2_{DB_2C_2}}$.

Вариант 12

1. $\left(13 - \sqrt{21}\right)/2$.

2. Первый член 1 или 4, разность равна $-1/5$.

3. 1) $5/2$; 2) $324/25$.

4. Сначала следует выступить в газете, а затем 2 раза на радио и 1 раз на телевидении.

5. $(-\infty; -4)\cup\{0; 2\}\cup(4; +\infty)$.

6. $a \in (-\infty; -1]\cup\{0\}\cup(2; +\infty)$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{ax^2 + 2a^2x + 1}\left(16\arcsin^{-4}(x + 3a)\right) \ge 0,$$

а это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} ax(x + 2a) > 0, \\ -1 \le x + 3a \le 1, \\ x + 3a \ne 0. \end{cases}$$

Вариант 13

1. $(-3; -2)\cup(3; 4]$. **2.** $(0; 3]$. **3.** 24 дня.

4. $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$. *Указание.* Через точку C проведите прямую, параллельную BD и пересекающую AB в точке E. Площадь трапеции равна площади треугольника ACE.