Вариант 3

1. 5 км. **2.** $\{3\}\cup[8;+\infty)$.

3. $\frac{23\pi}{36}+\pi k$, $\frac{35\pi}{36}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. $\frac{\sqrt{129}+31}{2}$. *Указание.* Пусть $\angle O_1AD=\alpha$ (рис.6). Тогда

$$\angle O_2AD=2\alpha$$

и

$$AN=\frac{8}{\operatorname{tg}2\alpha}<\frac{4}{\operatorname{tg}\alpha}=AM.$$

Пусть также $DM=u$, $DN=v$. Из подобия треугольников O_1DM и O_2DN следует, что $uv=32$. Кроме того, $u+v=$ $=FD+DE=\sqrt{129}$. Из этих соотношений следует, что $MN=$ $=u-v=1$. Исключая α из соотношений $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{8}{x}$, $\operatorname{tg}\alpha=$ $=\frac{4}{x+1}$, получим, что $x=15$, а $AD=x+v$.

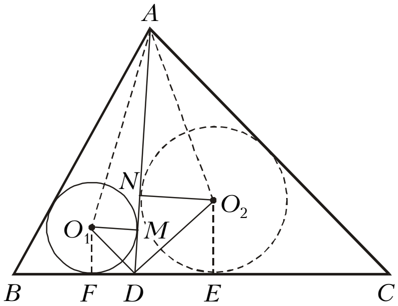

Рис. 6

5. $a\in[1;2)\cup(2;3]$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$3^{(t^2-1)(a-2)^2+1}-2=\frac{1}{|t|},$$

где $t=\frac{x+a}{a-2}$. При $a=2$ решений нет, а при $a\neq2$ решениями служат $t=\pm1$ (убедитесь, что других решений нет).

6. $\frac{1}{6}V-\frac{2}{3}R^2V^3\left(\left(\frac{m^2-4R^2}{2}\right)^2-4mV\right)^{-2}$.

Указание. Пусть $\vec{AD}=\vec a$, $\vec{AB}=\vec b$, $\vec{AA_1}=\vec c$. По условию $\vec a\vec b=\vec b\vec c=\vec c\vec a=0$, $\vec a\vec a=a^2$, $\vec b\vec b=b^2$, $\vec c\vec c=c^2$, причем

$$\begin{cases}a+b+c=m,\\a^2+b^2+c^2=4R^2,\\abc=V.\end{cases}\qquad(*)$$

Введем обозначения

$$\frac{AM_1}{AB_1}=\alpha,\ \frac{A_1N_1}{A_1C_1}=\beta.$$

Тогда

$$V_1=V_{AA_1M_1N_1}=\alpha V_{AA_1B_1N_1}=\alpha\beta V_{AA_1B_1C_1}=\frac{\alpha\beta}{6}V.$$

Выразите α и β через a, b, c, получите затем выражение суммы объемов пирамид, после чего исключите a, b, c, пользуясь системой ($*$).

Вариант 4

1. $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right)<\frac{19\pi}{24}$. **2.** $\frac{2\pi}{3}+4\sqrt{2-\sqrt3}$.

3. $\left(-1;\frac{1-\sqrt5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1+\sqrt5}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. *Указание.* После замены $t=\log_{x+1}|x-2|$ получаем

$$|2t+2|\geq-3-3t\Leftrightarrow t\geq-1.$$

4. $2\sqrt{3\sqrt2-4}$. *Указание.* Из условия следует, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием высоты пирамиды. Задача сводится к нахождению радиуса этой окружности.

5. $\frac{2\pi}{3}+2\pi l$, $\frac{\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение можно переписать в виде

$$(\operatorname{tg}14x+3\operatorname{ctg}14x)+\left(\sqrt2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)^2=2\sqrt3.$$

Оценивая выражение в первой скобке с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\operatorname{tg}14x>0$. Тогда

$$\operatorname{tg}14x+3\operatorname{ctg}14x\geq2\sqrt3,$$

причем равенство достигается при

$$\operatorname{tg}14x=3\operatorname{ctg}14x\Rightarrow\operatorname{tg}14x=\sqrt3.$$

Таким образом, вся левая часть преобразованного уравнения не меньше $2\sqrt3$. Поэтому получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}14x=\sqrt3,\\\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt2}.\end{cases}$$

При $\operatorname{tg}14x<0$ решений нет.

6. $\sqrt6-\sqrt2$. *Указание.* Положим $AC=x$, $BC=y$, $AB=z$. Тогда

$$\begin{cases}z=xy\sin75^\circ,\\z^2=x^2+y^2-2xy\cos75^\circ,\\x+y+z=4+\sqrt6-\sqrt2.\end{cases}$$

Так как

$$\sin75^\circ=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2},\ \cos75^\circ=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2},$$

эта система принимает вид

$$\begin{cases}xy=\frac{z}{\sin75^\circ},\\z^2=(x+y)^2-2xy(1+\cos75^\circ),\\x+y=4+4\cos75^\circ-z.\end{cases}$$

Исключая x, y, получаем

$$z^2=(4+4\cos75^\circ-z)^2-\frac{2z}{\sin75^\circ}(1+\cos75^\circ).$$

Отсюда

$$z=\frac{8\sin75^\circ(1+\cos75^\circ)}{1+4\sin75^\circ}=\frac{8\sin75^\circ+4\sin150^\circ}{4\sin75^\circ+1}=2.$$

По теореме синусов находим

$$R=\frac{z}{2\sin75^\circ}=\sqrt6-\sqrt2.$$

Вариант 5

1. πn, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $\left(3+\sqrt{65}\right)/2$. **3.** $(-1;\ 0)$.

4. $5/2$. **5.** $x=1$; $y=3$.

6. $q(2p+q)/(p+q)$. *Указание.* Пусть $PQ=x$. Тогда

$$\frac{x}{q}=\frac{BP}{BM}.$$