А теперь сформулируем и докажем утверждение, обобщающее задачи 1 и 2 Архимеда.

Предложение. *Пусть AB и AC – диаметры полукругов (рис.8). Впишем в образовавшийся роговидный угол последовательность окружностей γ_1, γ_2, … с радиусами r_1, r_2, …, попарно касающихся друг друга; положение первой окружности произвольно. Обозначим через h_n длину перпендикуляра, опущенного из центра n-й окружности на AB. Отношения $x_n = h_n : r_n$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 2.*

Доказательство. Пусть O_1, O_2, … – центры окружностей γ_1, γ_2, … Будем считать $AB = 2R$, $AC = 2r$. Произведем инверсию полученной конструкции относительно окружности ω произвольного радиуса с центром в точке A. На рисунке 8 взята окружность ω радиуса $2R$. В результате инверсии исходные полуокружности перейдут в лучи BL и $C'K$, перпендикулярные прямой AB, а γ_1, γ_2, … – в окружности γ_1', γ_2', …, касающиеся этих лучей и попарно друг друга. (Напомним, что центры P_1, P_2, … этих окружностей не являются инверсными для точек O_1, O_2, …) Обозначим через ρ радиусы полученных окружностей. Опустим из центров O_1 и P_1 перпендикуляры O_1H и P_1N на прямую AB и обозначим $O_1H = h_1$, $P_1N = \eta$. Окружности γ_1 и γ_1', как и треугольники AO_1H и AP_1N, гомотетичны с одним и тем же коэффициентом гомотетии. Поэтому $x_1 = h_1/r_1 = \eta/\rho$. Для следующей окружности имеем $x_2 = h_2/r_2 = x_1 + 2$. Аналогично, для любого натурального числа n выводится рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = x_n + 2.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ представляет собой арифметическую прогрессию с разностью 2. Предложение доказано.

Чтобы получить решение задачи 1 Архимеда, нужно к последовательности $\{x_n\}$ присоединить еще один член $x_0 = 0$. При этом к последовательности вписанных окружностей присоединяется полуокружность арбелона с диаметром CB. Нужно только помнить, что в задаче 1 Архимед рассматривает отношение h_n не к радиусам r_n, а к диаметрам, поэтому у него возникает последовательность натуральных чисел, а у нас – четных чисел: 2, 4, 6, …

Полагая в последовательности $\{x_n\}$ $x_1 = 1$, получаем последовательность нечетных чисел, т.е. решение задачи 2 Архимеда.

Архимеда интересовало и выражение для радиуса окружности, вписанной в арбелон (т.е. для r_1), через радиусы R и r исходных кругов. Он рассмотрел случай, когда $r : R = 3 : 5$ и, используя пропорциональность отрезков, получил, что $r_1 : R = 6 : 19$. Доказательство Архимеда легко может быть перенесено на любой арбелон.

Инверсия дает возможность выразить r_n через R и r для любого n при произвольном расположении первой окружности. Для упрощения вычислений проведем их лишь для случая арбелона. Оставим те же обозначения, которые использовались при доказательстве предложения; радиус базисной окружности будем считать равным $2R$. Тогда $AC' = 2R^2/r$ и $\rho = R(R-r)/r$. Центры P_1, P_2, … окружностей γ_1', γ_2', … лежат на серединном перпендикуляре NP_1 отрезка BC' (рис.9). При инверсии относительно окружности ω этот перпендикуляр перейдет в полуокружность Γ, построенную на диаметре AN', равном $4Rr/(R+r)$. Пусть D – центр окружности Γ; M_1, M_2, … – точки пересечения Γ с γ_1, γ_2, … соответственно; инверсными им будут точки M_1', M_2', … Так как при инверсии углы сохраняются, то окружность Γ пересекает каждую из окружностей γ_n под прямым углом. Обозначим $\angle BAM_1 = \varphi_0$, $\angle M_nAM_{n+1} = \varphi_n$ для любого номера n, тогда $\angle BDM_1 = 2\varphi_0$, $\angle M_nDM_{n+1} = 2\varphi_n$. Очевидно,

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \rho/AN = (R-r)/(R+r),$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0+\varphi_1) = 3\rho/AN = 3(R-r)/(R+r),$$

и вообще,

$$\operatorname{tg}(\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_n) = (2n+1)(R-r)/(R+r).$$

Из треугольника M_1DO_1 имеем

$$r_1 = DM_1\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2Rr}{R+r}\operatorname{tg}\left((\varphi_0+\varphi_1)-\varphi_0\right) = \frac{2Rr}{R+r}\cdot\frac{2\frac{R-r}{R+r}}{1+3\frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}} = \frac{Rr(R-r)}{R^2+r^2-Rr}.$$

Это результат Архимеда для произвольных R и r. Записывая для любого n угол φ_n в виде разности $\varphi_n = (\varphi_0+\ldots+\varphi_n) - (\varphi_0+\ldots+\varphi_{n-1})$, аналогично находим

$$r_n = \frac{Rr(R-r)}{Rr+n^2(R-r)^2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что для второй задачи Архимеда (здесь $\varphi_0 = 0$)

$$r_n = \frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2+4n(n-1)(R-r)^2}.$$

В общем случае формулы для r_n имеют сложный вид.

В Предложении фиксированные окружности радиусов r и R касались друг друга внутренним образом. Как

(Окончание см. на с.54)

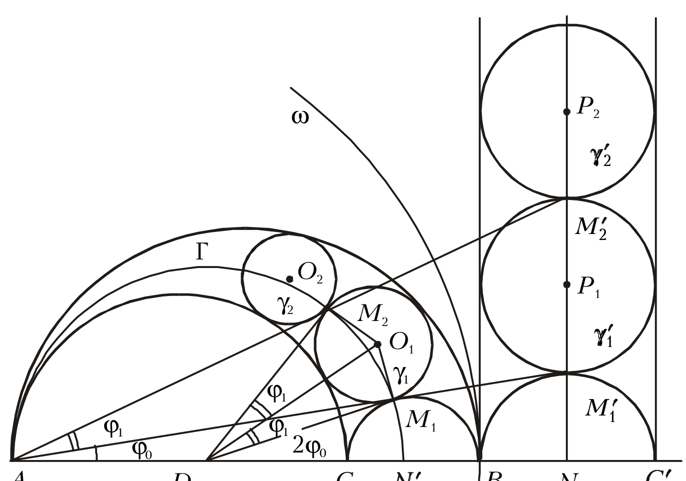

Рис. 9

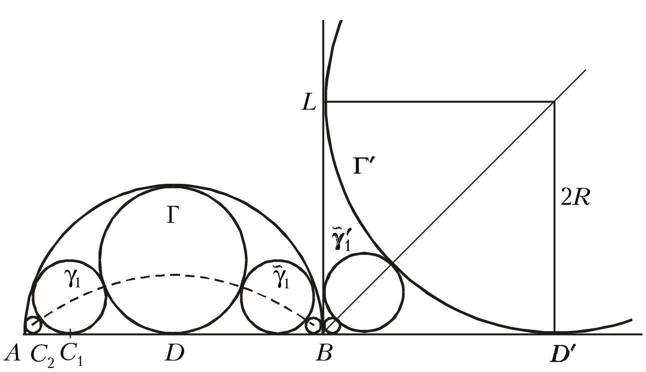

Рис. 10