Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1711» или «Ф1718». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1711 предлагалась на городской олимпиаде Костромы, а задачи М1716–М1718 – на XL Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1718, Ф1719, Ф1723, Ф1724 и Ф1727 предлагались на заочном туре VI Соросовской олимпиады по физике, а задачи Ф1720–Ф1722 и Ф1726 – на Московском интеллектуальном марафоне.

Задачи М1711–М1720, Ф1718–Ф1727

М1711. В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

Д.Калинин

М1712. а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.
б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

В.Произволов

М1713. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты такие точки A', B', C', что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке. Пусть D, E, F, D', E', F' – середины отрезков AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Докажите, что
а) прямые DD', EE', FF' имеют общую точку, причем эта точка, точка пересечения прямых AA', BB', CC' и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой;
б) если в качестве прямых AA', BB', CC' взяты высоты треугольника ABC, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром окружности Эйлера (окружности девяти точек) треугольника ABC;
в) если прямые AA', BB', CC' – биссектрисы треугольника ABC, то их общая точка, общая точка прямых DD', EE', FF' и точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и делящих его периметр пополам (точка Нагеля), лежат на одной прямой;
г) если прямые AA', BB', CC' делят периметр треугольника ABC пополам, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром масс контура треугольника ABC.

И.Вайнштейн

М1714. Докажите, что каждое из уравнений
а) $(x^2+1)(y^2-1)=z^2$,
б) $(x^2-1)(y^2-1)=z^2$, где $x \neq y$,
в*) $(x^2+1)(y^2+1)=z^2$, где $x \neq y$,
имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y и z.

В.Сендеров

М1715. Все натуральные числа от 1 до $2n$ записаны в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ такой, что

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|=2n^2.$$

Докажите, что

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|=n^2.$$

В.Произволов

М1716. В квадрате клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток отмечены N клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. Определите наименьшее возможное значение N, если соседними считать клетки, имеющие общую сторону.

Е.Барабанов, И.Воронович