Ничего сложного, как видите, нет. Но с ростом количества простых делителей числа n мы будем получать ответ, в котором все больше и больше слагаемых и вычитаемых. В статье Н. Васильева и В.Гутенмахера «Арифметика и принципы подсчета» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 год) это все подробно объяснено. А здесь мы изложим другой способ.

Теорема 3. *Функция Эйлера мультипликативна, т.е.*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

для любых взаимно простых натуральных чисел m и n.

Следствие. *Если $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – натуральные числа, то*

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{a_1}\right)\varphi\left(p_2^{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi\left(p_s^{a_s}\right) = \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}\right)\left(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_s^{a_s} - p_s^{a_s-1}\right).$$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим числа вида $mx + ny$, где $0 \le x < n$ и $0 \le y < m$. Запишем их в виде таблицы размером $n \times m$. Например, при $n = 5$ и $m = 8$ получаем таблицу 8.

Таблица 8

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	5	10	15	20	25	30	35
1	8	13	18	23	28	33	38	43
2	16	21	26	31	36	41	46	51
3	24	29	34	39	44	49	54	59
4	32	37	42	47	52	57	62	67

Остатки от деления на mn всех чисел этой таблицы разные. В самом деле, если бы какие-то два остатка совпали, то было бы выполнено сравнение

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{mn},$$

где $0 \le x_1, x_2 < n$ и $0 \le y_1, y_2 < m$. Отсюда следуют два сравнения:

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod m$$

и

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod n.$$

Первое приводит к сравнению

$$ny_1 \equiv ny_2 \pmod m,$$

из которого вследствие взаимной простоты чисел m и n получаем

$$y_1 \equiv y_2 \pmod m.$$

Вспомнив, что $0 \le y_1, y_2 < m$, получаем: $y_1 = y_2$. Аналогично, сравнение по модулю n приводит к равенству $x_1 = x_2$.

Итак, все mn чисел таблицы дают разные остатки при делении на mn. Но возможных остатков от деления на mn ровно столько же, сколько чисел в таблице! Значит, рассматриваемые числа дают все возможные остатки от деления на mn. Другими словами, *для любого числа $d = 0, 1, \ldots, mn - 1$ существует и единственна такая пара целых чисел x, y, что $0 \le x < n$, $0 \le y < m$ и $d \equiv mx + ny \pmod{mn}$.*

В таблице 8 четные числа образуют четыре столбца, а числа, кратные 5, образуют одну строку. Это не случайно:

$$\text{НОД}(mx + ny, m) = \text{НОД}(ny, m) = \text{НОД}(y, m);$$

аналогично, $\text{НОД}(mx + ny, n) = \text{НОД}(x, n)$. По этой причине в рассматриваемой таблице числа, взаимно простые с m, расположены в $\varphi(m)$ столбцах (тех, где y взаимно просто с m), а числа, взаимно простые с n, образуют $\varphi(n)$ строк.

Теперь доказательство теоремы 3 не составляет труда: чтобы d было взаимно просто с mn, необходимо и достаточно, чтобы d было взаимно просто с числами m и n. Такие числа d лежат на пересечении $\varphi(m)$ столбцов (состоящих из чисел, взаимно простых с m) с $\varphi(n)$ строками (состоящими из чисел, взаимно простых с n). Всего получаем «решетку» из $\varphi(m)\varphi(n)$ чисел, что и требовалось доказать.

Упражнения

39. Запишем числа от 0 до $mn - 1$ в таблицу из m строк и n столбцов (табл.9).

Таблица 9

0	1	2	…	$n-1$
n	$n+1$	$n+2$	…	$2n-1$
$2n$	$2n+1$	$2n+2$	…	$3n-1$
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
$(m-1)n$	$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	…	$mn-1$

а) Составьте такую таблицу для $m = 3$ и $n = 4$. Зачеркните в ней сначала все четные числа, а затем – те из оставшихся чисел, которые кратны 3. Заметьте, что незачеркнутыми остались в

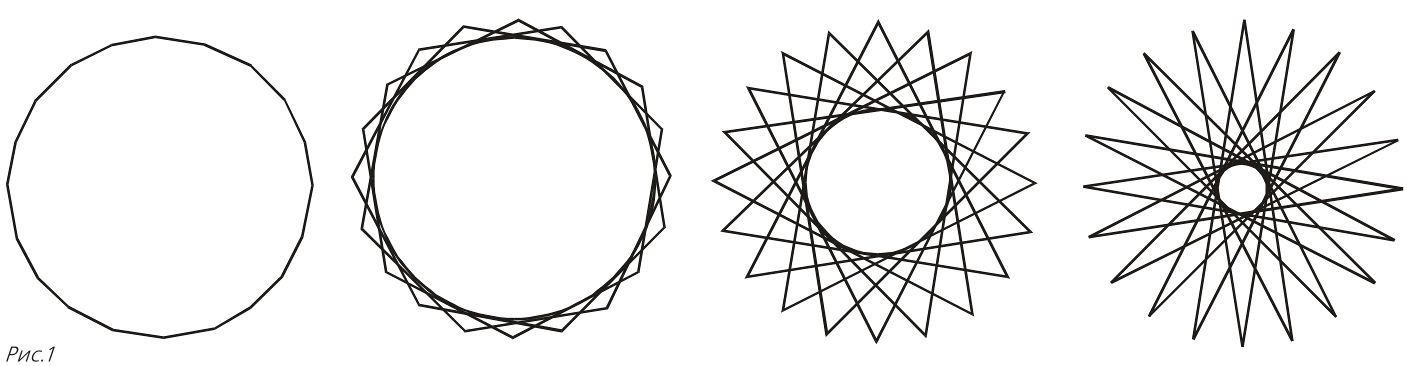

Рис.1