Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «Квант» проводит Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6—10 классов. Срок присылки решений – до 30 января 2000 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, корп. 3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет олимпиады.

Для переписки и сообщения вам результатов проверки в письмо обязательно вложите:

– пустой конверт с маркой с заполненным домашним адресом;

– дополнительную почтовую марку (марки) достоинством в 1 руб. 20 коп.;

– краткую анкету: возраст, класс и номер школы, фамилия учителя математики.

Не забудьте сделать пометку, что информацию об олимпиаде вы узнали из журнала «Квант».

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение. Списки победителей будут опубликованы в журнале «Квант».

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут приглашены к участию в традиционной очередной Всероссийской конференции одаренных школьников, которая состоится в Москве, и, возможно, войдут в команду для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2000/01 учебном году на льготных условиях.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6—10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. Восстановите пропущенные цифры (т.е. замените нули):

$$\begin{array}{r} \times\ 249 \\ 000 \\ \hline 000 \\ 008 \\ 200 \\ \hline 00007 \end{array}$$

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$3 + 8 + 15 + \ldots + 255.$$

3. В городе Тьмускорпиони телефонные номера состоят из пяти цифр. Первая цифра номера не может быть восьмеркой или нулем. Сколько телефонных номеров в Тьмускорпиони?

4. Фраза

Bekybekjwe – tvunemwe ctyd meuw,

имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте фразу.

5. На плоскости даны два одинаковых квадрата с общим центром. Какова может быть минимальная площадь их общей части?

6. Веревка равномерно намотана сверху донизу в виде винтовой линии в 8 оборотов на столб высотой 6 м и обхватом 1 м. Найдите длину веревки.

7. Двое играют в следующую игру: по очереди кладут на круглый стол по одной десятикопеечной монетке. Проигрывает тот, кому не останется места. Докажите, что первый может не проиграть.

7 класс

1. Найдите последнюю цифру числа 7^{1999}.

2. Докажите, что произведение всех натуральных чисел от 1 до 19 не является квадратом натурального числа.

3. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

4. См. задачу 6 для 6 класса.

5. Найдите сумму:

$$1 + 3 + 11 + 26 + \ldots + 1013.$$

6. Докажите, что нельзя обойти конем шахматную доску с вырезанными полями a1 и h8, побывав на остальных полях ровно по одному разу.

7. См. задачу 7 для 6 класса.

8 класс

1. Сравните числа

$$\frac{1}{\sqrt{2000}-\sqrt{1999}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{1999}-\sqrt{1998}}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1 - x.$$

3. См. задачу 6 для 6 класса.

4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 1 \end{cases}$$

при различных значениях параметра a?

5. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n окружностей?

6. Докажите, что нельзя обойти конем шахматную доску с вырезанными полями a3 и h6, побывав на остальных полях ровно по одному разу.

7. В вершинах единичного квадрата расположены центры четырех кругов единичного радиуса. Найдите площадь общей части всех четырех кругов.

9 класс

1. Докажите неравенство

$$\frac{a+b+c}{2} \geq \sqrt[4]{abcd},$$

где a, b, c, d – положительные числа.

2. См. задачу 6 для 6 класса.

3. Решите в целых числах уравнение

$$x^5 - x = 2000.$$

4. В каких пределах может изменяться площадь четырехугольного сечения единичного куба?

5. См. задачу 7 для 8 класса.

6. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sin xy < 0$.

7. В каждом из узлов бесконечной клетчатой решетки расположен центр круга радиусом 10^{-1999} см. Докажите, что любая прямая, проходящая через один из узлов сетки, пересечет бесконечное множество этих кругов. Размеры сетки 1×1 км.

10 класс

1. Решите уравнение

$$x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{\pi x}{2}.$$

2. См. задачу 6 для 6 класса.

3. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$\left(x+|x|\right)^2+\left(x^2+y^2-1\right)^2=0.$$

4. Найдите последнюю цифру числа $7^{9^{11}}$.

5. См. задачу 7 для 9 класса.

6. На сколько частей делят плоскость продолжения сторон правильного n-угольника?

7. Прожектор освещает октант (восьмую часть) прямоугольной системы координат. Какой максимальный объем кубической комнаты может осветить этот прожектор, если его поместить в геометрический центр комнаты? Ребро куба 10 м.