При $m = 2$ теорема доказывается с помощью алгоритма Евклида, после чего ее утверждение распространяется на общий случай $m > 2$ по индукции.

Об этом важном предложении элементарной теории чисел и его применениях уже не раз рассказывалось на страницах нашего журнала (см., например, статью Д.Флейшмана «Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова» в №3 за 1997 год).

Для окончания решения пункта в) достаточно применить теорему к системе уравнений $7 + 25x = 4 + 17y = \ldots$ $\ldots = 23 + 53v = 5 + 13w$.

Дополнение. Существуют ли более длинные арифметические прогрессии, удовлетворяющие всем условиям нашей задачи? На этот вопрос нетрудно ответить с помощью результатов статьи «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» (см. «Квант» №3 за 1999 год). Именно, легко показать, что разность любой прогрессии задачи обязана делиться на 12. С другой стороны, выше мы показали, что разность любой такой прогрессии, содержащей не менее семи членов, должна делиться на 7.

Прогрессия задачи с разностью $12 \cdot 7 = 84$ существует: с помощью статьи «Суммы квадратов...» и китайской теоремы об остатках легко показать, что делителем некоторого числа $n^2 + 1$ является произведение всех членов прогрессии (29, 113, 197, 281, 365, 449, 533, 617, 701, 785).

Эта прогрессия содержит 10 членов; 11 же членов прогрессия задачи с разностью 84 содержать не может: 84 не делится на простое число $p = 4k + 3 = 11$.

В.Сендеров

М1690. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Известно, что любая синяя грань является многоугольником, около которого можно описать окружность. Докажите, что и красная грань является многоугольником, около которого можно описать окружность.*

Каждой вершине многогранника припишем сферу, которая проходит через нее и через три вершины, соединенные с ней ребрами. Сколько вершин у многогранника, столько будет и приписанных сфер, хотя некоторые из них могут совпадать. Покажем, что сферы, приписанные соседним вершинам, т.е. вершинам, являющимся концами одного ребра, обязательно совпадают при условии, что это ребро является общей стороной двух синих граней.

Пусть AB – такое ребро многогранника, а S_A и S_B – сферы, приписанные вершинам A и B. Заметим, что две окружности, описанные около двух граней, стороной которых является ребро AB, должны лежать как на сфере S_A, так и на сфере S_B. А это значит, что сферы S_A и S_B совпадают.

Если бы среди сфер, приписанных вершинам, нашлись несовпадающие, то нашлись бы несовпадающие сферы, приписанные соседним вершинам. Но этого не может быть, как показано выше. Значит, все приписанные сферы совпадают и являются сферой S, описанной вокруг многогранника.

Плоскость, которой принадлежит красная грань, пересекает сферу S по окружности, являющейся описанной окружностью для красной грани.

В.Произволов

Ф1698. *На рисунке вы видите изображение идущих часов, полученное с помощью компьютерного сканера. Принцип его работы прост. Мощная лампа создает на сканируемом объекте узкую освещенную полоску, а отраженный свет попадает на набор фотодатчиков, которые расположены в виде линейки, параллельной этой полоске. И лампа, и линейка датчиков расположены на подвижной каретке. Каретка движется с постоянной скоростью, и датчики через равные интервалы времени передают в компьютер изображение. Таким образом, при перемещении каретки получается много «срезов» объекта, из которых и состоит изображение. Пользуясь данным изображением, определите направление и скорость движения каретки сканера, если длина секундной стрелки (от оси до острия) составляет 15 мм.*

Направление сканирования определяется просто. Очевидно, что кривизна изображения стрелки максимальна там, где скорость каретки направлена вдоль стрелки. На рисунке максимальная кривизна соответствует точкам вблизи оси, причем стрелка в этот момент почти вертикальна. Следовательно, сканирование осуществлялось в вертикальном направлении. Проведем касательную к секундной стрелке в точке ее крепления к оси. Деление на циферблате, на которое «покажет» касательная, есть момент начала или конца сканирования стрелки (в зависимости от того, вверх или вниз движется каретка). В нашем случае касательная «уперлась» в деление, соответствующее 28 секундам, в то время как острие стрелки показывает 20 секунд. Значит, каретка сканера пересекла острие секундной стрелки раньше, чем ее ось, т.е. каретка двигалась от цифры «6» к цифре «12». Отсюда сразу же можно найти время Δt, за которое каретка просканировала стрелку:

$$\Delta t = 28\ \text{с} - 20\ \text{с} = 8\ \text{с}.$$

Теперь найдем скорость каретки. Расстояние, которое прошла каретка за время Δt, равно расстоянию от острия секундной стрелки до прямой, проходящей через ось и цифру «3» на циферблате. Обозначим его через L. На рисунке это расстояние составляет $L_1 = 11$ мм. Кроме того, длина секундной стрелки на рисунке равна $l_1 = 20$ мм, а по условию задачи истинная длина стрелки $l = 15$ мм.[1] Так как при увеличении рисунка все размеры изменились в одинаковое число раз (изображение не искажено), то справедлива пропорция

$$\frac{L}{L_1} = \frac{l}{l_1}.$$

[1] *При воспроизведении рисунка в журнале масштаб изображения был несколько изменен, но это никак не сказалось на окончательном результате. (Прим. ред.)*