Решения задач М1676—М1680, Ф1688—Ф1697

М1676. *Отрезок AB разбит на черные и белые отрезки так, что сумма длин черных равна сумме длин белых отрезков. Для каждого черного отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки A до его середины и все такие произведения суммируем. Для каждого белого отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки B до его середины и все такие произведения тоже суммируем. Докажите, что обе суммы равны.*

Нужно доказать, что «черная» сумма равна «белой» сумме. Построим параллелограмм $PAQB$ такой, что его

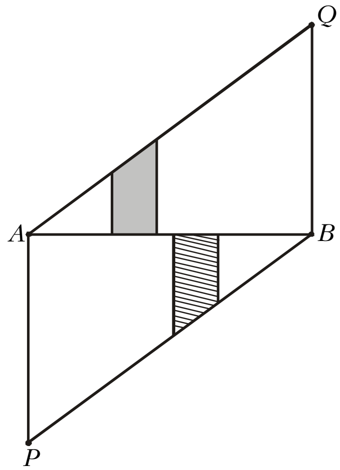


Рис.1

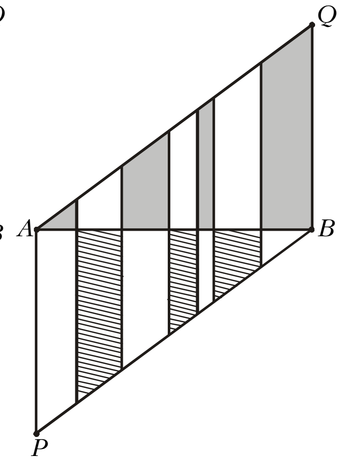


Рис.2

стороны PA и QB равны и перпендикулярны диагонали AB (рис.1). Каждое слагаемое черной суммы равно площади черной трапеции, построенной над соответствующим черным отрезком, а каждое слагаемое белой суммы равно площади белой трапеции (на рисунке она заштрихована), построенной под соответствующим белым отрезком.

Значит, нужно доказать, что сумма площадей черных трапеций равна сумме площадей белых трапеций.

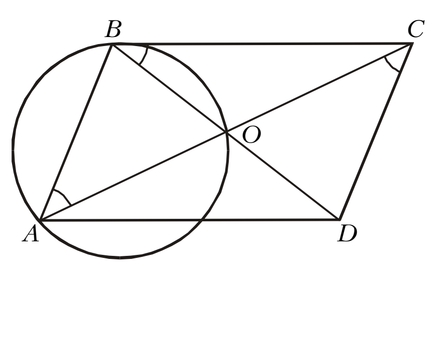
Разрежем параллелограмм $PAQB$ на вертикальные полосы, одни из которых содержат черные трапеции, а другие – белые (рис.2). Объединение полос (параллелограммов), содержащих черные трапеции, назовем фигурой F. В силу условия задачи площадь фигуры F равна половине площади параллелограмма $PAQB$. Площадь треугольника ABQ тоже равна половине площади $PAQB$. Значит, та часть площади параллелограмма $PAQB$, которая покрыта треугольником ABQ и фигурой F дважды (это все черные трапеции) равна той части площади параллелограмма $PAQB$, которая не покрыта ими вовсе (это все белые трапеции).

В.Произволов

М1677. *Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O и B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O и C, касается прямой CD.*

Углы OAB и OBC равны, так как первый вписан в окружность AOB, а второй образован касательной BC и хордой BO этой окружности (см. рисунок). Следовательно, углы OBC и OCD также равны, что эквивалентно утверждению задачи. Отметим, что параллелограмм, вершинами которого являются середины сторон данного, подобен исходному, поэтому задача допускает другую формулировку: в параллелограмме $ABCD$ углы CAB и DBC равны, $AD = 1$, найти AC.

А.Заславский



М1678. *В таблице из $n \times n$ клеток ($n \geq 3$) в каждой* *строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих в каждой строке, равна сумме произведений чисел, стоящих в каждом столбце.*

Нашу таблицу из $3n$ чисел будем называть матрицей M. Нужно доказать, что оговоренные в условии суммы S_1 и S_2 равны.

Каждая из этих сумм состоит из n слагаемых вида xyz, где $x+y+z=h$; при этом h постоянно для всех слагаемых. Можно записать $xyz=(h-y-z)(h-x-z)(h-x-y)$. Совершив элементарные преобразования с этим равенством, мы получим новое равенство, которое позволит нам решить задачу:

$$6xyz = h^3 - 3h\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(x^3+y^3+z^3\right). \quad (*)$$

Обозначим через A сумму квадратов всех чисел матрицы M, а через B – сумму кубов этих чисел. В силу $(*)$ можно записать

$$6S_1 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

а также

$$6S_2 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

т.е. окончательно – требуемое равенство:

$$S_1 = S_2.$$

В.Произволов

М1679. *Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задаются следующим образом. Выбираются два произвольных числа $a_0>0$ и $b_0<0$. Числа a_{n+1} и b_{n+1} принимаются равными, соответственно, положительному и отрицательному корням уравнения $x^2+a_nx+b_n=0$. Найдите пределы обеих последовательностей.*

Воспользовавшись теоремой Виета, получаем

$$a_n = -\left(a_{n+1}+b_{n+1}\right) = a_{n+2}+b_{n+2}\left(1-a_{n+2}\right).$$

Так как $b_{n+2}<0$, отсюда следует, что либо $1<a_{n+2}<a_n$, либо $1>a_{n+2}>a_n$, и, значит, последовательности, составленные из четных и нечетных членов a_n, монотонны и ограничены. Обозначим их пределы, соответственно, A_0, A_1. Теперь, поскольку $b_n=-\left(a_n+a_{n+1}\right)$, последовательность b_n имеет предел, равный $B=-\left(A_0+A_1\right)$. Переходя к пределу в равенстве $b_n=a_{n+1}b_{n+1}$, получаем $B=B\cdot A_0=$ $=B\cdot A_1$.

Если $B=0$, то $\left(A_0+A_1\right)=0$, что невозможно, так как A_0, A_1 положительны. Следовательно, $A_0=A_1=1$, $B=-2$.

А.Заславский, А.Поспелов

М1680. *Числовая последовательность задается равенством $x_n=n^3+C$, где n принадлежит натуральному ряду.*

а) Пусть C – натуральное число. Докажите, что любые три идущие подряд члена последовательности не имеют общего делителя (отличного от 1).

б) Пусть C является кубом натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.

в) Существует ли такое натуральное число C, что любые соседние члены последовательности взаимно просты?*

а) Предположим противное, и пусть p – простой общий делитель некоторых трех чисел x_n, x_{n+1}, x_{n+2}. Число p делит и числа $x_{n+1}-x_n$ и $x_{n+2}-x_{n+1}$, а значит, и число

$$\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)-\left(x_{n+1}-x_n\right)=\left(3(n+1)^2+3(n+1)+1\right)-$$
$$-\left(3n^2+3n+1\right)=6(n+1).$$

Но из трех чисел x_n, x_{n+1} и x_{n+2} ровно одно делится на 3 и хотя бы одно нечетно; значит, p делит $n+1$. С другой стороны, p делит $x_{n+1}=(n+1)^3+C$, откуда p делит C. Далее, поскольку число p делит $x_n=n^3+C$, то оно делит и n. Но НОД$(n+1,\ n)=1$. Противоречие.

б) Решение этого пункта содержится в решении пункта в).

в) Нет, не существует. Докажем это.

Любой общий простой делитель чисел n^3+C и $(n+1)^3+$ $+C$ делит также и число $27C^2+1$. Это доказывается непосредственно, с помощью алгоритма Евклида.

Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, при нечетном C число $27C^2+1$ четно. В то же время разность $x_{n+1}-x_n=3n(n+1)+1$ – число всегда нечетное.

Разберемся теперь, как обстоит дело с нечетными делителями; докажем вначале, что у любого числа $27C^2+1$, где C – натуральное, нечетный простой делитель есть.

Лемма. Уравнение $27C^2+1=2^k$ не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство леммы. Очевидно, число C не может быть четным. При нечетном C воспользуемся следующим очевидным преобразованием:

$$27C^2+1=28C^2-(C-1)(C+1).$$

Число $(C-1)(C+1)$ делится на 8, а число $28C^2$ – не делится. Следовательно, $2^k\le 4$; но $27C^2+1\ge 28$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем теперь, что любой нечетный простой делитель p числа $27C^2+1$ годится: существует такое $n(p)$, что и x_n, и x_{n+1} делятся на p. Чтобы показать это, нам будет удобнее оперировать не с самими числами, а с остатками, которые они дают при делении на p. При таком подходе числа, дающие один и тот же остаток при делении на фиксированное натуральное число m ($m\ge 2$), обычно отождествляют: их объединяют в единый «класс вычетов по модулю m». Обозначают это так: $a\equiv b \pmod m$. Очевидно, множество Z_m классов вычетов по модулю m содержит m элементов; в качестве представителей этих классов часто бывает удобно рассматривать остатки $0, 1, \ldots, m-1$.

При любом $m>1$ во множестве Z_m естественным образом вводятся операции сложения, умножения и вычитания. А в Z_p (p – простое) можно также и делить. Именно, любое сравнение $x\cdot a\equiv b \pmod p$, где $a\not\equiv 0 \pmod p$, имеет, и притом единственное, решение x; его и обозначают как $\frac{b}{a} \pmod p$.

Подробнее обо всем этом можно прочесть в статье А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 год).

Как мы уже говорили, все вычисления мы будем проводить в Z_p, где p – нечетный простой делитель числа $27C^2+1$. Для сокращения записи мы будем сравнения заменять равенствами: вместо $a\equiv b \pmod p$ мы будем писать просто $a=b$. В частности, при такой записи будет

$27C^2 + 1 = 0.$

Заметим сразу, что $p > 3$.

Положим

$$n = -\frac{3C}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Тогда

$$n(n+1) = \frac{9C^2}{4} - \frac{1}{4},$$

$$3n^2 + 3n + 1 = \frac{27C^2}{4} + \frac{1}{4} = 0. \qquad (2)$$

Далее,

$$3n^3 + 3n^2 + n = 0.$$

Из (2) и (1) следует, что

$$3n^2 + n = -2n - 1 = (3C+1) - 1 = 3C.$$

Получили:

$$3n^3 + 3C = 0,$$

или

$$n^3 + C = 0. \qquad (3)$$

Последнее равенство означает, что x_n делится на p; сложив (3) с (2), получим, что на p делится и x_{n+1} – следующий член последовательности задачи.

В.Сендеров

Ф1688. *Автомобиль на прямой передаче (на четвертой скорости коробки передач) может на прямом шоссе развивать скорость от 50 км/ч до 140 км/ч. При скорости 70 км/ч расход бензина составляет 7 л на 100 км пробега; КПД двигателя не зависит от скорости. Сопротивление движению пропорционально квадрату скорости автомобиля. Емкость бензобака автомобиля 40 л, других емкостей для топлива в автомобиле нет. Два водителя (чтобы можно было ехать без перерывов) должны перегнать автомобиль на расстояние 2000 км; заправочные станции по пути расположены на расстояниях 200 км или 300 км друг от друга; перегоны разной длины строго чередуются. За какое минимальное время водители смогут проделать весь путь? Какое минимальное количество бензина можно потратить, если ехать помедленнее? Езда на пониженной передаче приводит к увеличению расхода бензина.*

Каждый из перегонов нужно проехать с максимально возможной скоростью, насколько позволит запас бензина. Для перегона длиной 200 км можно потратить 20 л на 100 км. Расход бензина пропорционален силе сопротивления движению; следовательно, на этом участке скорость будет равна $v_1 = \sqrt{20/7} \cdot 70$ км/ч ≈ 118 км/ч и время прохождения составит $T_1 = 200/118$ ч $\approx 1{,}7$ ч. Для участка длиной 300 км расход топлива на 100 км составит $40/3$ л $\approx 13{,}3$ л; значит, $v_2 = \sqrt{13{,}3/7} \cdot 70$ км/ч $\approx$ ≈ 97 км/ч и $T_2 \approx 3{,}1$ ч. Полное время путешествия (четыре участка по 200 км и четыре по 300 км) составит

$$T_{\text{общ}} = 4(T_1 + T_2) \approx 19{,}2 \text{ ч}.$$

Более точный расчет не имеет смысла делать – слишком много явных упрощений в условии задачи.

Для второго случая все ясно – ехать нужно на наименьшей возможной скорости, т.е. на 50 км/ч. Расход бензина при этом составит $7 \text{ л} \cdot 50^2/70^2 \approx 3{,}5$ л на 100 км, и всего понадобится

$$3{,}5 \text{ л} \cdot \frac{2000}{100} = 70 \text{ л}.$$

С.Варламов

Ф1689. *По гладкому горизонтальному столу свободно скользит прямая однородная палочка длиной L. В данный момент скорость одного из концов палочки равна v и составляет угол α с палочкой, а скорость другого конца по величине равна 2v. Найдите скорость центра палочки и ускорения ее концов.*

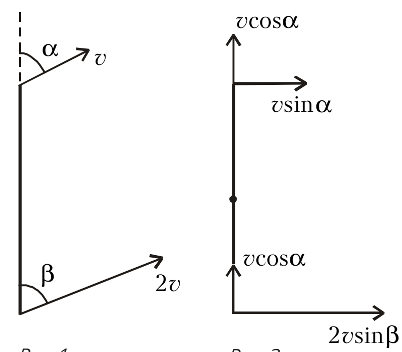


Рис.1 Рис.2

Из условия задачи ясно, что силы трения на палочку не действуют. Значит, центр масс (для однородной палочки – ее середина) движется с постоянной по величине и направлению скоростью и угловая скорость вращения палочки также неизменна.

Проекции скоростей концов палочки на ее направление должны быть равны друг другу в любой момент, поэтому (рис.1)

$$v\cos\alpha = 2v\cos\beta, \text{ и } \cos\beta = \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

На рисунке 2 скорости концов палочки разложены на удобные направления – вдоль палочки и перпендикулярно ей. Скорость центра тоже выразим через ее проекции. Вдоль палочки это $v\cos\alpha$, а перпендикулярно ей –

$$\frac{v\sin\alpha + 2v\sin\beta}{2} = v\left(\frac{1}{2}\sin\alpha + \sqrt{1 - \frac{1}{4}\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}v\left(\sin\alpha + \sqrt{4 - \cos^2\alpha}\right).$$

Теперь легко найти угловую скорость вращения палочки. Поскольку скорость «верхнего» конца относительно центра равна $\frac{1}{2}v\left(\sqrt{4-\cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)$, угловая скорость равна

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}v\left(\sqrt{4-\cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)}{\frac{1}{2}L} = \frac{v\left(\sqrt{4-\cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)}{L}.$$

Ускорения концов одинаковы и составляют

$$\omega^2 \frac{L}{2} = \frac{v^2\left(\sqrt{4-\cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)^2}{2L}.$$

А.Палочкин

Ф1690. *Небольшое тело бросают параллельно поверхности Земли с высоты 1 км. Определите, где находится точка падения тела на Землю, если его скорость на 1%*

меньше первой космической скорости. Можно считать Землю идеальным шаром, на котором нет атмосферы.

Пусть тело движется по круговой орбите с практически неизменной скоростью – это разумное упрощение, учитывая очень малое изменение расстояния до центра Земли. Выберем малый интервал времени τ и вычислим уменьшение расстояния от тела до центра Земли за это время. Тело «падает» с ускорением g и смещается «вбок» со скоростью $v = 0{,}99v_{\text{I}}$, где v_{I} – первая космическая скорость. Если бы мы бросили тело, придав ему первую космическую скорость, то в результате оно вовсе не приближалось бы к центру и не удалялось от него. В нашем случае квадрат нового расстояния до центра составит

$$\left(R-0{,}5g\tau^2\right)^2+(v\tau)^2=R^2-Rg\tau^2+0{,}25g^2\tau^4+\left(0{,}99v_{\text{I}}\tau\right)^2.$$

С учетом малости интервала времени τ, а также используя известное соотношение для первой космической скорости $v_{\text{I}}^2 = gR$, получим изменение расстояния до центра Земли:

$$\Delta R = 0{,}5g\tau^2\left(1-0{,}99^2\right).$$

Видно, что движение «вниз» – это просто равноускоренное движение с ускорением $a = 0{,}02g$. Время падения с этим ускорением с высоты $H = 1000$ м составит $\sqrt{2H/a}\approx$ ≈ 100 с, при этом тело пролетит вдоль окружности примерно 800 км.

З.Рафаилов

Ф1691. *Динамометр состоит из подставки и прикрепленной к ней однородной пружинки втрое меньшей массы. Один крючок динамометра соединен с подставкой, другой – со свободным концом пружинки. Два таких динамометра соединены «последовательно» – сцеплены двумя крючками, а внешние силы приложены к свободным крючкам. Приложим к этим крючкам противоположно направленные силы $\vec{F}$ и $\vec{f}$ – динамометры поедут по гладкой горизонтальной плоскости, вытянувшись вдоль линии действия сил. Считая, что пружинки не касаются витками оснований динамометров, определите показания приборов.*

Разберем вначале хорошо известную задачу о растяжении массивной пружинки, которую тянут за концы в противоположные стороны силами F_1 и F_2. При равенстве этих сил, т.е. когда $F_1 = F_2 = F$, удлинение пружинки жесткостью k равно $x = F/k$. При неравных силах – пусть для определенности $F_2 > F_1$ – найти растяжение сложнее, так как разные части пружинки будут растянуты неодинаково. Разобьем (мысленно) пружинку на большое число N одинаковых кусочков (можно было бы рассмотреть в качестве этих кусочков отдельные витки, но если число витков невелико, то подойдут и части витков). Жесткость каждого такого кусочка будет kN. Для части пружинки, содержащей n кусочков (рис.1) запишем

$$F_2-T_n=nma=n\frac{M}{N}\frac{F_2-F_1}{M}=n\frac{F_2-F_1}{N},$$

$$T_n=F_2-n\frac{F_2-F_1}{N}.$$

Суммируя удлинения кусочков, для всей пружинки

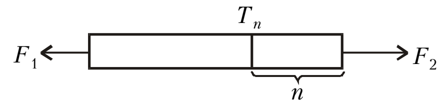


Рис.1

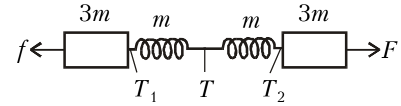


Рис.2

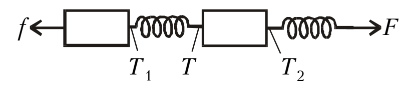


Рис.3

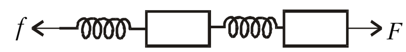


Рис.4

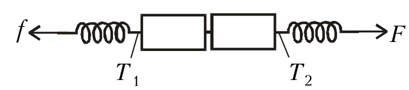


Рис.5

получим

$$x=\sum_1^N x_i=\sum_1^N\frac{T_i}{kN}=\frac{1}{kN}\left(\sum_1^N F_2-\sum_1^N n\frac{F_2-F_1}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{kN}\left(NF_2-\frac{F_2-F_1}{N}\frac{N(N+1)}{2}\right)=\frac{F_1+F_2}{2k}$$

(мы учли, что $N \gg 1$ и $N(N+1)/2 \approx N^2/2$). Видно, что растяжение массивной пружинки определяется полусуммой растягивающих сил. Динамометр с такой пружинкой может двигаться и с ускорением, но его показания определяются именно деформацией пружинки.

Теперь рассмотрим различные варианты соединения динамометров (обозначения ясны из соответствующих рисунков).

1) Для схемы на рисунке 2 запишем

$$T-f=(3m+m)a=4m\frac{F-f}{8m},\ T=\frac{F+f}{2},$$

$$T_1-f=3m\frac{F-f}{8m},\ T_1=\frac{3}{8}F+\frac{5}{8}f.$$

Растяжение первой (левой) пружинки равно

$$\frac{T_1+T}{2k}=\frac{1}{k}\left(\frac{9}{16}f+\frac{7}{16}F\right),$$

показания первого динамометра –

$$\frac{T_1+T}{2}=\frac{9}{16}f+\frac{7}{16}F.$$

Аналогично,

$$T_2=\frac{3}{8}f+\frac{5}{8}F,\ \frac{T_2+T}{2k}=\frac{1}{k}\left(\frac{7}{16}f+\frac{9}{16}F\right),$$

показания второго (правого) динамометра –

$$\frac{T_2+T}{2}=\frac{7}{16}f+\frac{9}{16}F.$$

2) Для схемы на рисунке 3 –

$$T=\frac{f+F}{2},\ T_1-f=\frac{3}{8}(F-f),\ T_1=\frac{5}{8}f+\frac{3}{8}F,$$

$$F-T_2=\frac{1}{8}(F-f),\ T_2=\frac{7}{8}F+\frac{1}{8}f.$$

Показания первого динамометра –

$$\frac{T_1+T}{2}=\frac{9}{16}f+\frac{7}{16}F,$$

второго –

$$\frac{T_2+F}{2}=\frac{1}{16}f+\frac{15}{16}F.$$

3) Для схемы на рисунке 4 можно использовать ответы случая 2), поменяв местами силы F и f.

4) Наконец, для схемы на рисунке 5 получаем

$$T_1-f=\frac{1}{8}(F-f),\ T_1=\frac{1}{8}F+\frac{7}{8}f,$$

$$F-T_2=\frac{1}{8}(F-f),\ T_2=\frac{7}{8}F+\frac{1}{8}f.$$

Показания первого динамометра –

$$\frac{f+T_1}{2}=\frac{15}{16}f+\frac{1}{16}F,$$

второго –

$$\frac{F+T_2}{2}=\frac{1}{16}f+\frac{15}{16}F.$$

С.Варлберман

Ф1692. *Поверхность планеты, имеющей такие же размеры, массу и состав атмосферы, как Земля, была полностью покрыта океаном с одинаковыми повсюду глубиной 230 м и температурой +10 °С. В результате внутренних процессов температура поднялась повсюду до +100 °С, однако глубина океана осталась прежней. Считая, что размеры твердой части планеты совершенно не изменились при нагревании, определите средний коэффициент объемного расширения воды в указанном диапазоне температур.*

При температуре +100 °С давление насыщенных паров воды равно 1 атм $\approx 10^5$ Па – такое давление создает столб воды высотой 10 метров. При начальной температуре +10 °С давление насыщенных паров во много раз меньше 1 атм. Будем считать, что испарившееся количество воды создает давление 1 атм, т.е. испарился слой воды, занимавший до нагревания «верхние» 10 метров океана (толщина атмосферы во много раз меньше радиуса планеты, поэтому при испарении вес этого количества воды не изменился).

Итак, при нагревании оставшийся слой воды толщиной 220 м расширился и скомпенсировал испарившийся объем. Коэффициент теплового расширения определяется отношением приращения объема к начальному объему при увеличении температуры на один градус. Средний коэффициент теплового объемного расширения воды в указанном диапазоне температур будет равен

$$\alpha=\frac{\Delta V}{V\Delta T}=\frac{10}{230\cdot 90}\frac{1}{\text{град}}\approx 5\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{град}}.$$

С.Варламов

Ф1693. *Лампочка для фонаря рассчитана на напряжение 2,5 В, ток при этом составляет 0,2 А. В нашем распоряжении имеются мощный источник напряжением 6 В и реостат на 10 Ом (у реостата сделаны выводы от краев обмотки и от движка, который может контактировать с любым витком, – такой прибор часто называют потенциометром). Как присоединить лампочку к источнику, чтобы она горела нормально? Где должен находиться движок реостата?*

Не получится просто соединить последовательно лампочку и реостат – максимальное его сопротивление 10 Ом и при токе 0,2 А он «погасит» только $10\cdot 0{,}2$ В = 2 В, а нужно «погасить» не менее 6 В – 2,5 В = 3,5 В. Ясно, что часть потенциометра должна быть подключена параллельно лампочке, чтобы ток в цепи увеличился и оставшаяся часть потенциометра смогла «погасить» необходимые 3,5 В.

Обозначим сопротивление параллельной части x, тогда последовательная составит $10-x$. Ток через параллельную часть при напряжении 2,5 В составляет $2{,}5/x$, вместе с током лампочки будет $0{,}2+2{,}5/x$. Получим простое уравнение

$$\left(0{,}2+\frac{2{,}5}{x}\right)(10-x)=3{,}5,$$

или, после преобразований,

$$0{,}2x^2+4x-25=0.$$

Положительный корень этого уравнения равен $x=5$. Это означает, что движок потенциометра установлен как раз посередине реостата.

М.Учителев

Ф1694. *В компьютерной модели атома водорода все размеры и заряды частиц увеличили в N раз. Считая, что плотность «вещества» частиц в модели сохранена, определите, во сколько раз изменится период обращения «электрона» вокруг «ядра». И еще: известно, что в атоме Резерфорда электрон излучает электромагнитные волны и, теряя энергию, должен упасть на ядро через малое время τ. Оцените время падения «электрона» на «ядро» в увеличенной модели.*

Масса «электрона» (и «ядра» атома) в этой модели увеличится в N^3 раз. Запишем уравнение второго закона Ньютона для электрона, который вращается вокруг ядра по круговой орбите радиусом R:

$$\frac{mv^2}{R}=k\frac{Qq}{R^2}.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{kQq}{mR}}\ \text{ и }\ T=\frac{2\pi R}{v}=2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kQq}}.$$

При увеличении всех размеров и зарядов в N раз получим

$$T^*=2\pi\sqrt{\frac{\left(mN^3\right)\left(RN\right)^3}{kQqN^2}}=TN^2,$$

т.е. период обращения «электрона» увеличится в N^2 раз. Легко видеть, что кинетическая энергия «электрона» в увеличенной модели будет равна

$$\frac{m^*v^{*2}}{2}=k\frac{Q^*q^*}{2R^*}=k\frac{Qq}{2R}N,$$

т.е. возрастет в N раз, а его ускорение будет

$$a^*=\frac{v^{*2}}{R^*}=\frac{kQ^*q^*}{m^*R^{*2}}=k\frac{Qq}{mR^2}\frac{N^2}{N^3N^2}=a\frac{1}{N^3},$$

т.е. уменьшится в N^3 раз. Излучаемая при ускоренном движении заряда мощность пропорциональна величине этого заряда и квадрату его ускорения (если это вам не известно, то можно воспользоваться методом размерностей и проверить сказанное). Итак, излучаемая в модели мощность будет равна

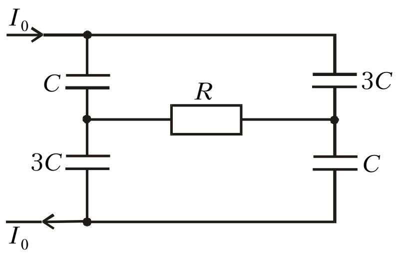
$$P^* = P\frac{N}{N^6} = \frac{P}{N^5}$$

и энергия «электрона» будет израсходована за время

$$\tau^* = \tau\frac{N^5}{N} = \tau N^4.$$

А.Зильберман

Ф1695. *В схеме на рисунке конденсаторы вначале не заряжены. Напряжение во внешней цепи непрерывно изменяют так, чтобы ток в этой цепи оставался равным I_0. Какое количество теплоты выделяется в резисторе за время T?*



Вначале решим задачу приближенно. Если с момента включения прошло немного времени, конденсаторы зарядились до небольших напряжений и ток через резистор мал. Тогда этим током можно просто пренебречь, а цепочки конденсаторов считать разделенными. При этом в каждую цепочку течет половинный ток, т.е. $0{,}5I_0$, и напряжение каждой цепочки, а значит и напряжение источника, растет со временем по закону

$$U(t) = \frac{0{,}5I_0t}{C_{\text{общ}}} = \frac{2I_0t}{3C}.$$

Это соотношение остается справедливым при малом токе через резистор, а ток определяется напряжением в диагонали «мостика» из конденсаторов – при малом токе напряжение составляет половину приложенного к схеме напряжения $U(t)$ (напряжение конденсатора емкостью C составляет три четверти этого напряжения, а конденсатора емкостью $3C$ – одну четверть). Тогда условие для малости тока резистора запишется в виде

$$\frac{0{,}5U(t)}{R} = \frac{I_0t}{3RC} \ll I_0,$$

а для времени –

$$t \ll 3RC,$$

где R – сопротивление резистора.

Через достаточно большое время после включения цепи (т.е. при $t \gg RC$) ток через резистор практически перестанет увеличиваться (его величина монотонно возрастает, но ограничена сверху). Это означает, что напряжения конденсаторов емкостями C и $3C$ за одинаковые интервалы увеличиваются одинаково и отношение токов равно отношению емкостей. Следовательно, ток зарядки конденсатора емкостью C (точнее, двух таких конденсаторов – ясно, что в данной симметричной схеме одинаковые конденсаторы заряжаются одинаково) равен $0{,}25I_0$, а ток конденсатора емкостью $3C$ составляет $0{,}75I_0$. За время Δt напряжение схемы увеличится на $2 \cdot 0{,}25I_0\,\Delta t/C$. Если начальным напряжением схемы пренебречь – вначале напряжение нарастало примерно с такой же скоростью, но в течение короткого времени, – то можно считать

$$U(t) = \frac{0{,}5I_0t}{C}.$$

Ток через резистор при этом составит $0{,}5I_0$, и за большой интервал времени T на резисторе выделится в виде тепла энергия

$$W = 0{,}25I_0^2RT.$$

Получим теперь точное решение задачи. Введем обозначения: q – заряд конденсатора емкостью C, J – ток зарядки этого конденсатора, Q – заряд конденсатора емкостью $3C$, $(I_0 - J)$ – его ток зарядки. Ток I резистора определяется разностью напряжений «нижних» конденсаторов:

$$\frac{q}{C} - \frac{Q}{3C} = IR = (I_0 - 2J)R.$$

Приравняем производные левой и правой частей этого уравнения и учтем при этом, что $q' = J$, $Q' = I_0 - J$:

$$\frac{J}{C} - \frac{I_0 - J}{3C} = -2J'R.$$

После простых преобразований получим

$$-1{,}5RCJ' = J - 0{,}25I_0.$$

Избавимся от постоянной добавки в правой части уравнения – вместо переменной величины J возьмем $J_1 = J - 0{,}25I_0$ (производная при этом не изменится, но уравнение станет проще, а потом мы эту поправку «учтем назад»):

$$J_1' = \frac{J_1}{-1{,}5RC}.$$

Если вы умеете решать такие уравнения, то очень хорошо, а если нет — будем решать его вместе.

Итак, что это за функция времени, которая при взятии от нее производной остается самою собой, но появляется множитель $1/(-1{,}5RC)$? Таким свойством, как известно, обладает экспонента:

$$J_1(t) = A\exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right).$$

Величину множителя A найдем, пользуясь начальным значением найденной функции. В «приближенном» решении мы установили, что сразу после включения цепи ток зарядки конденсатора меньшей емкости $J(0)$ равен половине тока I_0, тогда

$$A = 0{,}5I_0 - 0{,}25I_0 = 0{,}25I_0.$$

Теперь запишем полученное выражение для тока зарядки конденсатора:

$$J(t) = 0{,}25I_0\left(1 + \exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right)\right).$$

Дальше мы найдем заряд конденсатора емкостью C как функцию времени – для этого достаточно проинтегрировать по времени полученное выражение для тока:

$$q(t) = \frac{0{,}25I_0t}{C} + 0{,}25I_0\left(1{,}5RC - 1{,}5RC\exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right)\right).$$

Легко проверить, что это выражение «превращается» при малых временах в половину тока I_0, а при больших – в четверть этого тока. Для получения окончательного ответа не нужно проделывать те же операции для большого конденсатора – суммарный ток мы знаем, а заряд конденсатора емкостью $3C$ найдем по формуле

$$Q(t) = I_0 t - q(t).$$

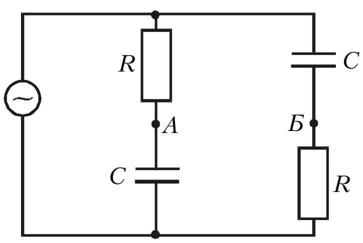
Напряжение источника равно сумме напряжений двух разных конденсаторов:

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} + \frac{Q(t)}{3C} = \frac{q(t)}{C} + \frac{I_0 t - q(t)}{3C} = \frac{I_0 t}{3C} + \frac{2q(t)}{3C}.$$

Подставив в эту формулу выражение для заряда конденсатора C, мы получим окончательный вид зависимости $U(t)$. Для нахождения точного ответа на вопрос о выделившемся количестве теплоты можно записать выражение для мгновенной тепловой мощности $P(t) = \left(I_0 - 2J(t)\right)^2 R$ и проинтегрировать его на интервале $(0 - T)$ – это не очень сложно, но мы все же ограничимся приближенным ответом...

А.Теплов

Ф1696. *Цепь из двух конденсаторов емкостью по 10 мкФ и двух резисторов сопротивлением по 1 кОм (см. рисунок) подсоединена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр, включенный между точками А и Б? А если вместо вольтметра подключить амперметр – какой ток он покажет? А если включить в цепь ваттметр, подсоединив высокоомную его обмотку (обмотку напряжения) непосредственно к источнику, а низкоомную (токовую) к точкам А и Б, – что он покажет?*



Вольтметр, подключенный к точкам *А* и *Б* цепи, покажет 220 В. Действительно, его показания равны разности напряжений конденсатора и резистора – с учетом фазового сдвига 90°. Сумма этих двух напряжений равна напряжению сети 220 В, а при таком фазовом сдвиге сумма и разность векторов равны по величине (это получается только при одинаковых парах элементов в цепи – мы прибавляем к напряжению на резисторе напряжение одного из конденсаторов, а вычитаем напряжение другого конденсатора).

С амперметром немного сложнее. Считая его сопротивление очень малым, получаем два одинаковых блока «резистор–конденсатор», соединенных последовательно. Напряжение на каждом из блоков равно половине напряжения сети, тогда ток любого резистора равен I_R = 110 В/1000 Ом = 0,11 А. Ток конденсатора найдем, воспользовавшись величиной его реактивного сопротивления $X = 2\pi fC$ = 318 Ом, – он составит 110 В/318 Ом ≈ 0,35 А. С учетом сдвига фаз найдем ток через амперметр:

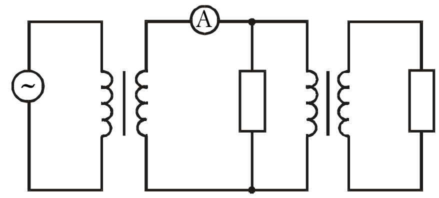
$$I_{\text{А}} = \sqrt{0{,}11^2 + 0{,}35^2}\ \text{А} \approx 0{,}36\ \text{А}.$$

Показания ваттметра определяются средним по времени значением произведения тока низкоомной обмотки, включенной как амперметр (действующее значение этого тока $I_{\text{А}} \approx 0{,}36$ А), и напряжения высокоомной обмотки (действующее значение U = 220 В). В нашем случае токи резисторов совпадают по фазе с напряжением сети, ток низкоомной обмотки сдвинут по фазе на угол $\varphi = \arccos\left(I_R/I_{\text{А}}\right)$. Тогда среднее значение произведения напряжения и тока составит

$$UI_{\text{А}}\cos\varphi = UI_{\text{А}}I_R/I_{\text{А}} = UI_R = 220\ \text{В}\cdot 0{,}11\ \text{А} = 24{,}2\ \text{Вт}.$$

З.Рафаилов

Ф1697. *Каждый из двух одинаковых трансформаторов имеет две многовитковые обмотки, в одной из которых витков вдвое больше, чем в другой. Трансформаторы соединены между собой так, как показано на рисунке (никаких дополнительных подробностей нет!), и подключены к сети переменного напряжения 220 В. Что может показывать в этой схеме амперметр? Сердечники трансформаторов сделаны из материала с очень большой магнитной проницаемостью, потерь энергии в трансформаторах нет. Сопротивления резисторов – по 1 кОм каждое.*



Тут возможны четыре различные схемы подключения обмоток трансформаторов: 1) оба трансформатора понижающие, 2) оба повышающие, 3) первый понижающий, второй повышающий и 4) первый повышающий, второй понижающий. В случае 1) напряжение на первом резисторе 110 В, на втором 55 В. Ток через амперметр совсем просто найти из энергетических соображений:

$$\frac{U}{2} I_1 = \frac{(U/2)^2}{R} + \frac{(U/4)^2}{R},$$

откуда

$$I_1 = \frac{220}{1000}\cdot\frac{5}{8}\ \text{А} = \frac{11}{80}\ \text{А} = 131{,}5\ \text{мА}.$$

В случае 2) получаем уравнение

$$2UI_2 = \frac{(2U)^2}{R} + \frac{(4U)^2}{R},$$

откуда

$$I_2 = \frac{440}{1000}\ \text{А} + \frac{1760}{1000}\ \text{А} = 2{,}2\ \text{А}.$$

В случае 3)

$$\frac{U}{2} I_3 = \frac{(U/2)^2}{R} + \frac{U^2}{R},\ \text{и}\ I_3 = \frac{110}{1000}\ \text{А} + \frac{440}{1000}\ \text{А} = 0{,}55\ \text{А}.$$

В случае 4)

$$2UI_4 = \frac{(2U)^2}{R} + \frac{U^2}{R},\ \text{и}\ I_4 = \frac{440}{1000}\ \text{А} + \frac{110}{1000}\ \text{А} = 0{,}55\ \text{А}.$$

Р.Александров