«Пентиум» хорошо, а ум лучше

А.БААБАБОВ

Решето и $\pi/4$

По одной колее навстречу друг другу вышли два поезда. И не встретились.
— Почему?
— Не судьба...

Анекдот

Как известно, для нахождения простых чисел можно использовать решето Эратосфена: выписываем подряд натуральные числа 1, 2, 3, 4, … (чем больше, тем лучше), а затем зачеркиваем сначала числа 4, 6, 8, 10, …, затем числа 6, 9, 12, 15, …, на следующем шаге – числа 10, 15, 20, 25, … В конце концов незачеркнутыми останутся только простые числа и число 1.

Решето Акулича устроено иначе. Он не *за*черкивает, а *вы*черкивает числа. Точнее говоря, сначала вычеркивает из натурального ряда каждое второе число (2, 4, 6, …), затем вычеркивает каждое третье из оставшихся чисел, затем – каждое четвертое из оставшихся, и так далее. Что останется? Останется довольно-таки странная последовательность: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, … Вычислять ее вручную – весьма утомительное и неблагодарное дело.

Программа

Мой ученик одиннадцатиклассник В.Иофик написал на Borland C++ 3.1 программу, которая позволяет найти многие тысячи членов последовательности Акулича.

```
#include<alloc.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
main(int argc, char *argv[])
{
 if(argc<3){printf("\nНаберите в командной строке:\n\
   %s <имя_файла> <натуральное_число>",argv[0]); return 1;}
 FILE *f=fopen(argv[1],"w");
 if(!f){printf("\n\nНе могу открыть файл \'%s\'\a",argv[1]);
        return 2;}
 long k, n=(atol(argv[2])+1)/2, m=n;
register long i,j;
char huge *arr=(char huge *)farcalloc(m,sizeof(char));
if(!arr){printf("\n\nНе хватает памяти.\a");
         fclose(f);return 3;}
printf("\nВыделено %ld байт памяти \n",m);
for(i=0;i<m;i++)arr[i]=1;
for(k=3;k<=n;k++)
 {printf("\rВычеркиваю каждое %ld из %ld чисел       ",k,n);
  for(i=0,j=0;i<m;i++)
   {if(arr[i])j++; if(j==k){j=0;arr[i]=0;n--;} }
 }
printf("\rЗаписываю результаты в файл \'%s\'          ",argv[1]);
double d;
for(i=0,j=0;i<m;i++)if(arr[i])
 {j++; d=(double)(8*i+4)/(j*j);
  if((fprintf(f,"%9ld     %lf\n",2*i+1,d))==EOF)
  {printf("\n\nОшибка записи.\a");
   fclose(f); farfree(arr); return 4;}
 }
fclose(f); farfree(arr); return 0;
}
```

Окончание. Начало см. в «Квант» №4

В этой программе в каждый момент вычислений n обозначает количество уцелевших чисел, а k пробегает значения 2, 3, 4, 5, … до тех пор, пока не окажется $k > n$, что и является сигналом к окончанию вычислений. Ради экономии времени и памяти все четные числа вычеркнуты до начала вычислений, так что программа во время вывода результатов применяет формулу $2i + 1$ для нечетного числа и формулу $(8*i+4)/(j*j)$ – для учетверенного отношения j-го члена последовательности к квадрату его номера.

Применив списки вместо массивов и некоторые другие программистские хитрости (компилятор GNU C), Иофик затем написал программу, которая справилась с первыми ста миллионами чисел (и даже больше!). Например, 3826-й член последовательности оказался равен 11499769. При этом $4\cdot 11499769/\left(3826^2\right)\approx 3{,}1423$.

Число $\pi/4$ и формула Валлиса

Результаты вычислений убедительно свидетельствуют: при $j\to\infty$ отношение величины j-го члена изучаемой последовательности к j^2 стремится к $\pi/4$. Значит, решето Акулича позволяет вычислять длину окружности! Как он сам пишет, «такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря уже о любителе математики».

Да, результат удивительный. Но давайте не будем падать в обморок. Число π встречается не только в геометрии, но и в математическом анализе. Например,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots,$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots$$

Известны и другие соотношения с участием π. Нам потребуется только одно из них – опубликованная в 1665 году английским математиком Джоном Валлисом (1616–1703) формула

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}\right)^2=\frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Чтобы понять, как она связана с решетом Акулича, давайте проанализируем процесс вычеркивания. Поклонники «Пентиума» при этом могут смотреть на экран компьютера, на котором работает программа Иофика.

Что происходит в начале вычислений?

Для вычислений мы берем не весь натуральный ряд, а лишь первые N натуральных чисел и вычеркиваем сначала каждое второе из них, оставляя в точности $N-[N/2]$ чисел, т. е. приблизительно $N/2$. Затем вычеркиваем каждое третье число из оставшихся, так что останется примерно $2/3$ остатка, т.е. приблизительно $N/3$. (Точную формулу все еще несложно написать: $N-[N/2]-\left[\frac{N-[N/2]}{3}\right]$. Но чем дальше, тем больше понадобится знаков целой части, так что лучше уж писать простые приближенные формулы, чем нагромождать квадратные скобки.) Когда вычеркнем каждое четвертое из оставшихся чисел, останется примерно $3/4$ предыдущего количества, т.е. $\frac{3}{4}N/3 = N/4$. И вообще, после вычеркивания каждого k-го числа останется примерно $n = N/k$ чисел.

Казалось бы, все уже сделано: мы помним, что вычисления заканчиваются в момент, когда $k > n$, т.е. $k^2 > N$. Значит, k-й член последовательности должен быть *примерно* равен k^2. Только вот правильного ответа $\pi k^2/4$ такое простое рассуждение никак не дает!

Почему не дает? Из-за многократно повторенных слов «примерно» и «приблизительно». Заменяя целую часть числа самим этим числом, мы делаем не очень большую – не больше 1 – ошибку. Но за k шагов ошибки накапливаются и оказываются по величине сравнимы с самой исследуемой величиной.

Обратите внимание: в начале вычислений k невелико, а N/k огромно, так что относительная ошибка невелика, а с ростом k и соответственным уменьшением величины N/k относительная ошибка возрастает!

Что происходит в конце вычислений?

В самый последний момент число k оказывается равно количеству n уцелевших к этому моменту чисел. Перед этим довольно продолжительное время k приблизительно равно n и потому на каждом таком k-м шаге вычеркиваем по одному числу. Перед этим несколько более короткое, но тоже продолжительное время вычеркиваем по два числа, перед этим – по три числа, и так далее.

Давайте придадим этому более точную форму. Пусть самый последний шаг – вычеркивание j-го числа из j уцелевших к этому моменту. Тогда перед ним вычеркнули $(j-1)$-е число из $j+1$, при этом было $k = j-1$ и $n = j+1$. Чуть раньше $k = j-2$ и $n = j+2$, еще раньше $k = j-3$ и $n = j+3$. Вообще, если идти с конца к началу, то до тех пор, пока вычеркивали по одному числу, выполнялись равенства $k = j-a$ и $n = j+a$. Переход на другой режим происходит в момент, когда $2(j-a) \approx j+a$, т.е. когда $a \approx j/3$. При этом $k \approx \frac{2}{3}j$ и $n \approx 2k$. (Разумеется, можно было бы получить не приближенные, а точные формулы. Но дальнейшие рассуждения все равно потребуют приближенных формул, так что мы обойдемся без лишних квадратных скобок.)

Теперь ясно, что формулы $k \approx \frac{2}{3}j - b$ и $n \approx \frac{4}{3}j + 2b$ описывают процесс на той стадии, когда вычеркиваем по два числа. Переход на режим вычеркивания по три числа соответствует равенству $3\left(\frac{2}{3}j - b\right) \approx \frac{4}{3}j + 2b$, из которого находим $b \approx \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}j$, откуда $k \approx \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}j$ и $n \approx 3k$.

Продолжая рассуждать в том же духе и обозначая для краткости $c_m = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$, находим, что переход между режимами вычеркивания по m и по $m+1$ чисел происходит при $k \approx c_m j$ и $n \approx (m+1)k$.

Сознательно сделав несколько вычислительных ошибок, Акулич смог из этих формул получить число $\pi/4$. Будучи честным человеком, он сам обратил внимание читателей на эти передергивания и признал, что «рассуждения имеют немало огрехов, но искоренять их как-то не поднимается рука: не навредить бы!». В общем, он поступил как инженер, которому некогда разбираться с тонкостями математических формул и который поэтому не постесняется умножить или разделить полученный ответ на 2 или на что-нибудь другое, если после этого ответ будет лучше соответствовать экспериментальным данным.

А дело в том, что формулы $k \approx c_m j$ и $n \approx (m+1)k$ довольно точны при маленьких m и теряют точность при возрастании m. Эффект такой же, какой мы уже наблюдали, когда рассматривали процесс от начала к концу: ошибка накапливается и оказывается при больших m сопоставимой с самой исследуемой величиной.

Стыковка

Что же делать, если и при рассмотрении от начала к концу, и при рассмотрении от конца к началу успевает накопиться ошибка? Любой строитель подземного тоннеля знает ответ: надо пустить их навстречу друг другу! В момент стыковки $k \approx c_m j$ и $N/k \approx (m+1)c_m j$, откуда $N \approx (m+1)c_m^2 j^2$. В силу формулы Валлиса, $(m+1)c_m^2 \to \pi/4$, так что мы получили в точности то, что требовалось. И заметьте: никакого обмана и обсчета читателей!

Доказательство формулы Валлиса

Использовать формулу Стирлинга $m! \approx (m/e)^m\sqrt{2\pi m}$ для доказательства формулы Валлиса я не буду, поскольку самое известное и простое доказательство формулы Стирлинга состоит именно в том, что сначала доказывают соотношение $m! \approx k\sqrt{m}(m/e)^m$ с некоторым неизвестным коэффициентом k, а затем из формулы Валлиса находят $k = \sqrt{2\pi}$.

Я сделаю проще: как рекомендуют с давних пор по этому поводу учебники математического анализа, рассмотрю

$$a_m = \int_0^\pi \sin^m x\,dx.$$

Тогда $a_0 = \pi$ и $a_1 = 2$. Далее – интегрирование по частям в стиле вытягивающего себя за волосы из болота Мюнхгаузена:

$$a_{m+1} = \int_0^\pi \sin^{m+1}x\,dx = -\int_0^\pi \sin^m x\,d\cos x = -\sin^m x\cos x\Big|_0^\pi +$$

$$+\,m\int_0^\pi \cos^2 x\sin^{m-1}x\,dx = m\int_0^\pi \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{m-1}x\,dx =$$

$$= ma_{m-1} - ma_{m+1},$$

откуда

$$a_{m+1} = \frac{m}{m+1}a_{m-1}.$$

Теперь легко находим $a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 2\cdot\frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi$, и вообще

$$a_{2m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}\pi,\quad a_{2m+1} = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Какое отношение все эти интегралы имеют к формуле Валлиса? Самое прямое: из неравенств

$$a_{2m-1} > a_{2m} > a_{2m+1}$$

следуют неравенства

$$1 > \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} > \frac{2m}{2m+1},$$

из которых легко получить формулу (2).

Упражнение 11. а) Обычно в учебниках формула Валлиса имеет вид

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdots$$

Выведите ее из формулы (2).

б) Проверьте, что формула Валлиса может быть записана также в виде

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\cdot 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}.$$

Чудеса в решете

Давайте чуть изменим правила решета Акулича и будем вычеркивать из натурального ряда сначала каждое второе число, потом каждое четвертое из оставшихся чисел, затем каждое шестое, и так далее. Получится последовательность 1, 3, 5, 9, 11, 17, 19, 25, 27, 35, 37, 43, 51, 57, 59, 69, 75, 83, 85, 97, 101, 113, 117, 129, … Угадали закономерность? Наверное, еще нет. На компьютере можно вычислить огромное число членов этой последовательности. Например, ее 6700-й член оказался равен 589459. По-прежнему ничего не понятно? Ну тогда я признаюсь, что $589459\big/\left(6700\cdot\sqrt{6700}\right)\approx$ $\approx 1{,}0748$. И вообще, эта последовательность растет не как n^2, а как $n\sqrt{n}$.

Аналогичный порядок роста появляется, если вычеркивать из натурального ряда сначала каждое третье число, потом каждое пятое из оставшихся, потом каждое седьмое, и так далее. Невычеркнутыми при этом останутся числа 1, 2, 4, 5, 8, 10, 13, 16, 19, 20, 26, 28, 32, 34, 41, 43, 47, 53, 58, 61, 68, 70, 73, 80, 86, 88, 94, 101, … Хотите знать, почему n-й член последовательности приблизительно равен $0{,}684n\sqrt{n}$? Тогда есть два пути: либо обзавестить суперкомпьютером и вычислять, вычислять, вычислять, ничего строго так и не доказав, ибо натуральный ряд целиком невозможно поместить в память никакого компьютера, либо подумать, как рассуждения предыдущих разделов переносятся на эти и другие случаи.

Оказывается, теоретические рассуждения позволяют найти ответ в общем случае. К сожалению, в этот ответ входит изобретенная Л.Эйлером гамма-функция Г. Ее определение слишком сложно, чтобы излагать его здесь. Поверьте на слово: истинная причина возникновения числа π в решете Акулича — в том, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Палиндромы

– Абба а?
– Абба аббабба.
– Бааб?
– Аа. Абба аббабба баабааб.

Палиндром (по-русски, *перевертыш*) – это слово, которое выглядит одинаково при чтении как слева направо, так и справа налево (например, ШАЛАШ, РОТОР или АААББАББАББААА).

Через $f(n)$ обозначим такое наименьшее число, что всякое слово длиной n, составленное из букв А и Б, может быть разбито не более чем на $f(n)$ палиндромов. Чтобы привыкнуть к функции f, давайте найдем $f(6)$. Всего шестибуквенных слов $2^6 = 64$, но поскольку буквы А и Б равноправны, достаточно рассмотреть только слова, начинающиеся на букву А:

АААААА	ААБАА+А	АБА+ААА	АББА+АА
ААААА+Б	АА+БААБ	А+БАААБ	АА+БААБ
ААА+АБА	А+АБАБА	АБА+АБА	АББА+Б+А !
АААА+ББ	АА+БАБ+Б !	АБА+А+ББ !	АББА+ББ
А+ААБАА	ААББАА	АБАБА+А	АБББА+А
ААА+БАБ	А+АББА+Б !	АБАБА+Б	АБББА+Б
АА+АББА	А+АБББА	АБА+ББ+А !	АББББА
ААА+БББ	АА+ББББ	АБА+БББ	А+БББББ

Восклицательными знаками отмечены слова, которые нельзя разбить менее чем на три палиндрома. Мы видим, что всякое шестибуквенное слово можно разбить не более чем на три палиндрома[4]; $f(6) = 3$.

В статье «Ум хорошо, а пять – лучше» приведены первые 19 значений функции f:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4
$n/f(n)$	1	1	1,5	2	2,5	2	2,33	2	2,25	2,5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$f(n)$	5	5	5	6	6	6	6	7	7	
$n/f(n)$	2,2	2,4	2,6	2,33	2,5	2,66	2,83	2,57	2,71	

Одиннадцатиклассники В.Иофик и В.Лемпицкий составили программу, которая вычислила несколько следующих значений функции f:

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$f(n)$	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10
$n/f(n)$	2,5	2,62	2,75	2,87	2,66	2,77	2,6	2,7	2,8	2,9

Величину $f(28)$ эта программа вычисляла более 30 часов, а $f(29)$ – трое суток. Дальше я ей считать не дал – выключил компьютер. Потом они усовершенствовали свою программу, но все равно даже $f(60)$ вычислить перебором абсолютно невозможно: $2^{60} = 1024^6 > 10^{18}$. Если перебирать каждую секунду сто миллионов ($=10^8$) слов, то потребуется более 10^{10} секунд. Это значительно превышает гарантийный срок работы «Пентиума»!

Величина $n/f(n)$ – это средняя длина палиндромов, на которые разбито самое трудно разбиваемое n-буквенное слово. Как видно из таблицы, эта величина имеет тенденцию к росту. «Может ли величина $n/f(n)$ быть сколь угодно большой?» – спрашивает Акулич и, поскольку на этот вопрос не могут ответить ни счетные палочки, ни абак, ни «Пентиум», взывает: «Одна надежда – на читателей. Возможно, кто-нибудь сумеет составить такую программу, которая вычислит значения $f(n)$ для нескольких сотен первых n, анализируя которые, удастся правильно спрогнозировать ее поведение и найти предел (если он существует, конечно). А может, есть и чисто теоретический путь?»

Есть чистый путь! Давайте рассмотрим слово абвабвабв … … абв, состоящее из многократно повторенного слова абв. Оно может быть разбито на палиндромы единственным образом – рассыпано на отдельные буквы. Теперь заменим

[4] *Здесь я должен просить прощения у ревнителей чистоты русского языка: конечно, не очень складно говорить, что всякий палиндром можно разбить на один палиндром, ибо никакого разбиения при этом на деле не происходит. Но такова уж привычка математиков – стараться одной фразой охватить все случаи.*

каждую букву а на АА, б – на ББ, в – на АБ. Получим слово

ААББАБААББАБААББАБ ... ААББАБ ...

Самые длинные палиндромы в этом слове – АББА и БААБ – имеют длину 4. Рассмотрев любое n-буквенное подслово этого слова, получаем неравенство $f(n) \geq n/4$. Значит, отношение $n/f(n)$ ограничено сверху числом 4.

А теперь – самое интересное. По-видимому, верна следующая теорема.

Теорема 2. *При любом натуральном n имеем* $f(3n) = n + 1$, $f(3n+1) = n + 1$, $f(6n+2) = 2n+2$. *При любом натуральном* $n > 1$ *имеем* $f(6n+5) = 2n+2$, *исключительное значение* $f(11) = 5$.

Следствие. *Предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{f(n)}$ *существует и равен 3.*

К сожалению, доказательство этой теоремы требует довольно большого перебора. Но главная идея может быть изложена довольно-таки коротко: *каждое слово из n букв А и Б может быть разбито не более чем на* $[(n+4)/3]$ *палиндромов.*

Это легко доказать по индукции: база очевидна, а переход состоит в следующем. Если мы от слова сумеем отрезать начало длиной $3s$ или более, которое можно разбить на s палиндромов, то мы победили. Поэтому будем рассматривать только слова, в которых этого сделать нельзя. Довольно скучный перебор показывает, что есть всего одна неприятная возможность – это

АБААББ(БААБАБ)(БААБАБ)...,

где БААБАБ'ы бесконтрольно размножаются. С этим словом надо разобраться индивидуально. (Проделайте эту работу!)

К сожалению, неравенства

$$f(n) \leq [(n+4)/3] \qquad (3)$$

недостаточно для доказательства теоремы 2. Нужно еще убедиться, что при $n = 6k+5$, где $k > 1$, неравенство строгое.

При $n \leq 17$ это верно. Если $n > 17$, то рассмотрим начало n-буквенного слова – первые его 6 букв. Будем считать, что слово начинается на букву А. Если начало можно разбить не более чем на 2 палиндрома, то все в порядке. Значит, осталось рассмотреть только те начала, которые в таблице были отмечены восклицательными знаками: 1) ААБАББ, 2) ААББАБ, 3) АБААББ, 4) АБАББА и 5) АББАБА.

Начнем с третьего случая: АБА–АББ. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут одни только буквы Б. (Это очень важное соображение, и потому я прошу задержаться взглядом на этом месте и хорошо все обдумать.) Поскольку слово АБААББ...ББ можно разбить на 3 палиндрома, что прекрасно согласуется с неравенством (3), третий случай разобран.

Аналогично, в пятом случае: АББА–БА. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут только буквы А. Слово АББАБА...АА можно разбить на 3 палиндрома, и это согласуется с неравенством (3).

В четвертом случае припишем к началу АБАББА всевозможными способами шестибуквенные слова:

АБА+ББ+АААААААА
А+БАБ+БААААААБ
А+БАБ+БААААБ+А
. . . .
АБА+ББ+АББББББА
А+Б+АББА+ББББББ

Многоточия стоят потому, что в журнале никак нельзя привести все слова, хотя для доказательства я перебирал все подряд!

Аналогично рассматриваем второй случай:

А+АББА+Б+АААААА
А+АББА+БААААAБ
АА+ББ+АБААААБА
. . . .
АА+ББ+АББББББА
А+АББА+ББББББ

Осталось рассмотреть первый случай:

АА+БАБ+Б+АААААА
АА+БАБ+БААААAБ
АА+БАБ+БААААБ+А
А+АБА+ББААААББ
АА+Б+АББА+ААБАА
АА+БАБ+БАААБ–АБ
АА+БАБ+БАААБ–БА
. . . .
АА+Б+АББББББА
АА+БАБ+ББББББ

При этом обнаруживается, что все слова поддаются разбиению, кроме двух: ААБАБББАААБА и ААБАБББААБАБ. Если приписать к первому из них букву А, то получаем АА+Б+АБББА+ААБАА. Если же приписать букву Б, то получим слово ААБАБББАААБАБ, с которым надо разбираться всерьез:

АА+БАБ+ББ+АААБАБААА+АА
АА+БАБ+ББ+АААБАБААА–АБ
. . . .
АА+БАБ+Б+БАААБ+АББББББА
АА+БАБ+Б+БАААБ–АББББББ

Мы победили слово ААБАБББАААБА! Осталось (непобедимое!) слово ААБАБББААБАБ. Справиться с ним мешает периодически продолжаемое слово ААБАБББААБАБББАА-БАББААБАБББААБАБ... Как с ним быть — не знаю.

Но если удастся разобраться с этим, останется выписать для каждого натурального n слово длиной n, которое нельзя разбить менее чем на указанное в теореме 2 число палиндромов – и доказательство будет закончено! К сожалению, я не представляб, как завершить это доказательство без крайне утомительного перебора.

Упражнения

12. Придумайте слово из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на 3 палиндрома, но которое после приписывания к нему справа или слева любой из букв А и Б можно разбить на два палиндрома.

13. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots, 21$ укажите слово длиной n из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на $f(n)$ палиндромов.

Примечание. Познакомившись с рукописью этой статьи, И.Акулич чистосердечно раскаялся в своих заблуждениях и поклялся в дальнейшем и близко не подходить к компьютерам. Он признал удивительную интуицию учителя физики В. Боева, который, едва ознакомившись с третьей задачей, сразу заявил, хотя и бездоказательно: «Предел равен трем».

В заключение неисправимый грешник добавил: «Представляете, чего мог бы достичь лорд Рэлей, если бы у него был «Пентиум»?!»

Послесловие

Понятно, что цель «компьютеризации» школьного образования — поручить компьютеру решение скучных и трудоемких задач, сохраняя время для более важных дел. При этом открывается путь — «изучать (науку), обучая (компьютер)», — который до сих пор был возможен только для научных работников.

Готовы ли школьные науки к такому подходу? Стихия учебного процесса веками отбирала темы, которые безболезненно усваиваются при помощи доски, мела и голоса. Сейчас становится возможным иной подход, но он изменит преподавание математики не раньше, чем изменится структура самой науки. Такой переворот, если он вообще случится, потребует многих десятилетий. А пока слияния математики с информатикой не получилось.

Многие ученые охотно пользуются компьютерами, храня свои статьи на магнитных дисках и рассылая их по электронной почте, так что срок публикации статей измеряется днями, а не месяцами, как в обычном журнале. Возможножно, что эпоха печатных статей в науке кончается навсегда, а типографии вновьограничатся изготовлением книгдлительного пользования. Однако в практике математического творчества персональные компьютеры пока малочто изменили. В математике есть ряд областей, постоянно или часто нуждающихся в трудоемких вычислениях: теория чисел, функциональный анализ, теория вероятностей. Здесь компьютеры успешно применяют с пятидесятых годов. Но математика всегда стремится к тому, чтобы заменить переборы и вычисления логическими рассуждениями, сводя к минимуму необходимость чисто технической работы.

Итак, хотя в умелых руках компьютери может дать обильную пищу для размышлений, машина все же в состоянии полностью заменить живого математика. И хотя математическая логика много делает для формализации доказательств, а системы искусственного интеллекта становятся все мощнее, в мире (пока?) есть место не только для роботов, но и для людей.

НАША ОБЛОЖКА

Капельки росы, стеклянные шарики и микроскоп Левенгука

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Левенгук владел многими тайнами техники микроскопии. Например, в литературе высказывается предположение, что он первым применил темнопольное освещение, существенно улучшающее контраст микроскопического изображения и облегчающее наблюдения прозрачных объектов и препаратов. Но среди секретов Левенгука был главный, который состоял в том, что человек может сделать многое, если посвятит своей работе всю жизнь. Не случайно Левенгук стал членом Лондоновского Королевского общества и одним из самых знаменитых людей своей эпохи.

Для своих микроскопических наблюдений Левенгук обычно пользовался придуманным и сконструированным им самим простым микроскопом, т.е. лупой, снабженной механическим устройством для фиксирования и фокусировки объекта. Единственная более или менее короткофокусная линза этого микроскопа была наглухо закреплена между двумя металлическими пластинками, каждая с точечным круглым отверстием, служившим для прохождения света. При помощи подвижной скобы к пластинкам прикреплялся вертикальный винт (ручка) с небольшим столиком на верхнем конце. Столик нес вращающуюся иглу для фиксирования объекта; горизонтальный винт, проходивший сквозь столик и упиравшийся в пластинку, позволял менять расстояние столика от пластинки и вместе с тем – расстояние объекта от линзы, т.е. фокусировать объект

Приведем отрывок из книги ученого-бактериолога Поля де Крюи «Охотники за микробами», описывающий, как работал Левенгук:

«Замечательно забавно смотреть через линзу и видеть предметы увеличенными во много раз. Что ж, покупать для этого линзы? Ну, нет! Не таков был Левенгук. В течение двадцати лет неизвестности он ходил к оптикам и обучался у них искусству обтачивать и шлифовать стекла. Он посещал алхимиков и аптекарей, совал свой нос в их тайные способы выплавлять металлы из руд и понемногу научился обращаться с золотом и серебром. Это был чрезмерно упорный и настойчивый человек; он не довольствовался тем, что его линзы были так же хороши, как у лучших мастеров Голландии, – нет, они должны быть лучше самых лучших! И добившись этого, он все еще сидел и возился с ними много часов подряд. Затем он вставлял эти линзы в небольшие оправы из меди, серебра или золота, которые он сам вытягивал на огне, среди адского дыма и чада. В наше время исследователь покупает за сравнительно небольшие деньги изящный блестящий микроскоп, поворачивает винт, заглядывает в окуляр и делает свои открытия, мало задумываясь о том, как устроен микроскоп. Но Левенгук сам делал свои инструменты.

Конечно, его соседи думали, что он немного «тронулся», но он упорно продолжал жечь и калечить свои пальцы. Он весь ушел в работу, забывая о семье и друзьях, просиживая целые ночи напролет в своей тихой странной лаборатории. И в то время как добрые соседи над ним исподтишка посмеивались, этот человек научился делать мельчайшие линзы, размером меньше 1/8 дюйма в диаметре, и притом настолько симметричные, настолько точные, что они ему показывали самые мелкие предметы в сказочно огромном и ясном виде.

Да, он был совершенно некультурный человек, но только он один во всей Голландии умел делать такие линзы и при этом говорил о своих соседях:

– Не стоит на них сердиться: они ведь ничего лучшего не знают...

Затем этот самодовольный торговец мануфактурой стал наводить свои линзы на все, что попадалось ему под руку. Он смотрел через них на мышечные волокна кита и на чешуйки своей собственной кожи. Он отправлялся к мяснику, выпрашивал или покупал у него бычьи глаза и восторгался тонким устройством хрусталика внутри глаза. Он часами изучал строение овечьих, бобовых и лосиных волосков, которые под его стеклышком превращались в толстые мохнатые бревна... Он исследовал поперечные срезы разных пород деревьев и, прищурившись, любовался семенами растений. «Невероятно!» – ворчал он, увидев большое грубое жало блохи или ножки вши.

Этот чудной парень Левенгук был похож на молодого щенка, который, пренебрегая всеми правилами приличия и учтивости, с любопытством обнюхивает каждый новый предмет в окружающем его мире».

Де Крюи назвал Левенгука первым охотником за микробами.

А.Митрофанов