так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи.
Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_iB_j, C_iC_j и D_iD_j. Если Вася перерезает провод между контактами из разных групп и с разными номерами, например провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например провод A_kB_k, то Петя перережет провод C_kD_k. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода.
Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от контактов с таким же номером. Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходит поровну проводов. Значит, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

10 класс

1. Пусть Винни и Пятачок вначале кладут свои орехи во II и III банки, несмотря на ходы Кролика, до тех пор, пока в одной из банок не станет 1998 орехов. После этого тот, кто должен класть орехи в эту банку (пусть, например, это Винни), начинает класть их в I. При этом он уже положил во II банку не менее 999 орехов, значит, в III банке орехов тоже не менее 999 (туда их клал Пятачок). После этого Пятачок продолжает класть в III банку орехи, пока их там не станет 1998 – это произойдет не более чем через 500 ходов, так как в III банку также приходится класть орехи Кролику, чтобы не проиграть. После этого Пятачок также может класть орехи в I банку, так как там не более 500 орехов, положенных Винни, а Кролик вынужден будет положить орех во II или III банку, где их уже по 1998.
2. *Ответ*: $a_1 = a_2 = \ldots = 2$.
Пусть для каких-то двух членов последовательности a_k и a_{k+1} их НОД равен 1. Тогда $\text{НОД}(a_k, a_{k+1}) =$ $= \text{НОД}(a_k + a_{k+1}, a_{k+1}) = \text{НОД}(a_{k+2}, a_{k+1})$, т.е. для всех последующих членов последовательности НОД тоже будет равен 1. При этом, начиная с k-го члена, последовательность превращается в последовательность $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, которая неограниченно возрастает.
Итак, НОД всегда должен быть не меньше 2. Если какие-то члены последовательности a_k и a_{k+1} не равны друг другу, то $a_{k+2} < \max\{a_k, a_{k+1}\}$ и $a_{k+1} \neq a_{k+2}$.
Аналогично, $a_{k+3} < \max\{a_{k+1}, a_{k+2}\} < \max\{a_k, a_{k+1}\}$.
Мы получили, что максимальное число в парах идущих подряд членов последовательности монотонно убывает, т.е. когда-то станет равным 1, и тогда НОД у каких-то членов тоже станет равен 1, чего не должно случиться.
Итак, все члены последовательности должны равняться друг другу и их НОД = 2, т.е. $a_n = 2$.

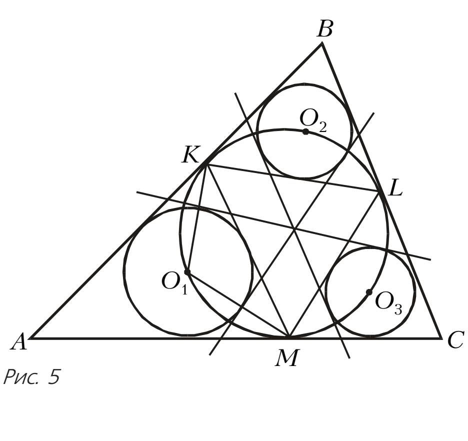

Рис. 5

3. Пусть K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно, O_1, O_2, O_3 – центры малых окружностей (рис.5). Так как $\angle KO_1M = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, а $\angle KLM = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, то $\angle KO_1M + \angle KLM = 180^\circ$, и O_1 лежит на вписанной в треугольник ABC окружности. Аналогично, O_2 и O_3 лежат на этой окружности и являются серединами дуг KL и LM. Используя результат задачи 3 для 9 класса, заключаем, что построенные касательные проходят через центр окружности, вписанной в треугольник KLM, что и требовалось доказать.
6. Задача является частным случаем задачи 7 для 9 класса, когда точки E и D совпадают с точкой B.

11 класс

1. *Ответ*: нет.
Пусть сумма цифр каждого из чисел равна $S = 9k + n$, $n = 0$, 1, …, 8. Тогда все эти числа имеют остаток n при делении на 9, и имеет место сравнение $19n = 18n + n \equiv 1999 \pmod 9$, откуда $n \equiv 1 \pmod 9$, т.е. $n = 1$.
1) Пусть $k = 0$, т.е. $S = 1$. Рассмотрим 5 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 1. Это числа 1, 10, 100, 1000 и 10000. Но даже их сумма больше 1999.
2) Пусть $k = 1$, т.е. $S = 10$. Рассмотрим 19 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 10. Это числа 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190. Их сумма равна 1990 < 1999. Следующее натуральное число с суммой цифр, равной 10, есть 208, что по крайней мере на 18 больше любого из первых 19 чисел, и, значит, сумма будет не менее 1990 + 18 = 2008 > 1999.
3) Пусть $k \geq 2$, т.е. $S \geq 19$. Но наименьшее число с суммой цифр не меньше 19 есть 199, а сумма любых 19 таких чисел будет заведомо больше 1999.
Таким образом, мы получили, что 19 чисел, удовлетворяющих условию, не существуют.
2. Предположим противное, т.е. пусть существует такая расстановка целых чисел, что для любого отрезка AB с серединой C выполняется неравенство $c < \frac{a+b}{2}$, где a, b, c – соответственно числа, стоящие в точках A, B и C. Пусть A, B, C, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – соответственно точки -1, 1, 0, $-\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n}$ числовой прямой, a, b, c, a_n, b_n – целые числа, записанные в этих точках. Тогда, по предположению, $c < \frac{a+b}{2}$, $a_1 < \frac{a+c}{2}$, $a_2 < \frac{a_1+c}{2}$ и т.д. Отсюда следует, что $\max\{a,c\} > \max\{a_1,a_2\}$, так как $a_1 < \frac{a+c}{2} \leq \frac{\max\{a,c\}+\max\{a,c\}}{2} = \max\{a,c\}$, $a_2 < \frac{a_1+c}{2} \leq \frac{\max\{a,c\}+c}{2} \leq \max\{a,c\}$. Аналогично, $\max\{a_1,a_2\} > \max\{a_3,a_4\} > \max\{a_5,a_6\} > \ldots$ и $\max\{b,c\} > \max\{b_1,b_2\} > \max\{b_3,b_4\} > \ldots$ Таким образом, $a_{2m} < \max\{a,c\} - m$, $b_{2m} < \max\{b,c\} - m$, и, значит, при некотором m будет выполнено неравенство $a_{2m} + b_{2m} \leq 2c$. Противоречие, так как число c записано в середине отрезка $A_{2m}B_{2m}$.
3. Введем обозначения (рис.6). Как было показано в решении задачи 3 для 9 класса, $RQ \| KM \| EF$, $RE \| LN \| QF$. Значит, образовавшийся четырехугольник – параллелограмм. Используя то, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны и $AB + CD = AD + BC$, получаем $RQ + EF = RE + QF$, так как $(RQ + EF) - (RE + QF) = (a_{12} + a_{34}) - (a_{23} + a_{41})$, где a_{ij} – длина общей внешней касательной к окружностям S_i и S_j.
Значит, $RQFE$ – ромб.