зающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Д.Карпов

10 класс

1. На столе стоят три пустые банки из-под меда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик – только во вторую или третью, а Пятачок – в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 1999 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл.

Ф.Бахарев

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, …, для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено условие

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}\left(a_{n-1}, a_{n-2}\right)}.$$

С.Волченков

3. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.

М.Сонкин

4. См. задачу М1704 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1697 «Задачника «Кванта».

6. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, $K \neq B$. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что угол BKO – прямой.

С.Берлов

7. См. задачу М1701 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М1702 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999?

О.Подлипский

2. Во всех рациональных точках вещественной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

С.Берлов

3. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC, CD в точках K, L, M, N соответственно. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – соответственно окружности, вписанные в треугольника AKL, BLM, CMN, DNK. К окружностям S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, – ромб.

М.Сонкин

4. См. задачу М1704 «Задачника «Кванта».

5. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой.

С.Берлов

6. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т.е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны).

В.Дольников

7. Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Д.Терешин

8. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Д.Карпов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гусев Глеб – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Волков Сергей – Мурманск, Мурманский политехнический лицей,
Деветьяров Дмитрий – Кирово-Чепецк, гимназия,
Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11;

по 10 классам –

Лифшиц Юрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Прудова Нина – Саров, гимназия 15,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,
Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,
Горский Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Мусатов Данил – Москва, гимназия 1543,
Ицыксон Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кузнецов Андрей – Киров, ФМЛ,
Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Спиридонов Сергей – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей;

по 10 классам –

Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42,
Горелов Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Тихомиров Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Скопенков Михаил – Саратов, ФТЛ 1,