11 класс

1. О функции $f(x)$, заданной на всей вещественной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой.

А.Голованов

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

С.Берлов

4. Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что *больших* граней не больше 6.

М.Евдокимов

5. Существуют ли действительные числа a, b и c такие, что при всех действительных x и y выполняется неравенство

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|?$$

В.Сендеров

6. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета.

А.Голованов, Е.Сопкина

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. Для бесконечного множества значений многочлена существует более одной целой точки, в которой принимаются эти значения. Докажите, что существует не более одного целого значения многочлена, принимаемого ровно в одной целой точке.

А.Голованов

Заключительный этап

Пятый (заключительный) этап олимпиады был проведен с 14 по 21 апреля в столице Республики Адыгея Майкопе.

16 и 17 апреля участников олимпиады ожидали сложные испытания, им предстояло за 5 часов решить 4 задачи. По мнению жюри, в этом году конкурсные задания были в целом труднее, чем в предыдущие несколько лет. Оказалось, что никто из участников не сумел решить всех задач, хотя каждая задача была кем-нибудь решена.

Традиционный опрос участников олимпиады выявил наиболее интересные для них задачи: 8 для 9 и 11 классов («кусачки») и 3 для 10 класса (впервые за последние годы участники назвали лучшей задачу по геометрии!).

Школьники предложили немало интересных и оригинальных решений, иногда даже неизвестных членам жюри. Самым сильным творческим достижением жюри признало решение задачи 4 учеником 9 класса Московской государственной Пятьдесят седьмой школы Ильей Межировым. Илья оказался единственным участником, решившим эту задачу. Интересно, что это выяснилось лишь при показе работ, а до этого момента жюри не верило в правильность решения.

Интересно также отметить, что два лучших результата по параллели 11 классов были показаны десятиклассниками В.Дремовым и А.Поярковым, а второй результат по параллели 10 классов – восьмиклассником А.Халявиным.

Диплом II степени по 11 классу получил 12-летний Р.Травкин («Квант» уже рассказывал об этом талантливом мальчике из Липецка в №5 за 1997 год). Самым юным участником олимпиады оказался 11-летний краснодарец Е.Молчанов.

Жюри определило состав команды России на Международной математической олимпиаде 1999 года. В нее вошли В.Дремов, А.Евсеев, А.Лебедев, Ю.Лифшиц, Ф.Петров, А.Поярков, запасные – М.Карвонен и А.Халявин.

Задачи

9 класс

1. В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$?

С.Волченков

2. См. задачу М1696 «Задачника «Кванта».

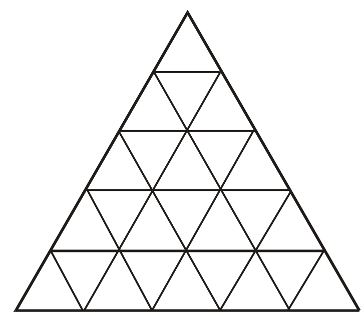
3. Треугольник ABC вписан в окружность S. Пусть A_0 – середина дуги BC окружности S, не содержащей A; C_0 – середина дуги AB, не содержащей C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC, окружность S_2 с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2.

М.Сонкин

4. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета – черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

С.Берлов

5. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на n частей (на рисунке $n = 5$).



Какое наибольшее число отрезков длины 1 с концами в вершинах этих треугольников можно отметить так, чтобы не нашлось треугольника, все стороны которого состоят из отмеченных отрезков?

М.Антонов

6. См. задачу М1699 «Задачника «Кванта».

7. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO – прямой.

С.Берлов

8. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо один, либо три провода. Хулиган, отре-