До сих пор мы пользовались чисто классическими представлениями. Теперь воспользуемся правилом квантования момента импульса для нашего иона: суммарный момент импульса системы электрон–ядро кратен постоянной Планка $\hbar$, т.е.

$$m_e v_e r_e + M_я v_я r_я = n\hbar,$$

где n = 1, 2, 3... Поскольку импульс иона равен нулю, $m_e v_e = M_я v_я$ и, следовательно,

$$m_e v_e \left(r_e + r_я\right) = n\hbar. \qquad (4)$$

Исключая скорость электрона v_e из уравнений (2) и (4), найдем возможные значения радиусов орбит электрона:

$$r_{en} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 m_e} n^2, \qquad (5)$$

а из уравнений (1) и (5) найдем возможные радиусы орбит ядра:

$$r_{яn} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 M_я} n^2.$$

Если говорить об орбитах электрона в системе координат, связанной с ядром, то

$$r_n = r_{en} + r_{яn} = \\ = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \dfrac{m_e M_я}{m_e + M_я}} n^2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \mu} n^2, \quad (6)$$

где $\mu = \dfrac{m_e M_я}{m_e + M_я}$ – так называемая приведенная масса. Подставляя полученное выражение (6) в формулу (3), получим дискретные значения полной энергии стационарных состояний иона:

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Потенциалом ионизации атома называют минимальную энергию, необходимую для перевода атома из нормального состояния (n = 1) в несвязанное состояние ($n \to \infty$). Для атома водорода Z = 1, $\mu = \dfrac{m_e m_p}{m_e + m_p}$, где m_p – масса протона, поэтому потенциал ионизации атома водорода равен

$$E_i = \frac{m_e m_p e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \left(m_e + m_p\right)\hbar^2} \approx 13{,}55 \text{ эВ},$$

а радиус первой боровской орбиты (боровский радиус) –

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 \left(m_e + m_p\right)}{e^2 m_e m_p} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Заметим, что боровский радиус и потенциал ионизации атома водорода являются характерными масштабами длины и энергии в атомных системах.

Задача 3. *Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг их центра масс. (Позитроний образуется при столкновении медленных нейтронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона.) Найдите уровни энергии, энергию ионизации и минимальное расстояние между электроном и позитроном для позитрония.*

Будем рассматривать позитроний как водородоподобный атом и воспользуемся результатами, полученными в предыдущей задаче. Для позитрония Z = 1, а приведенная масса $\mu = m_e/2$ (масса позитрона равна массе электрона), поэтому выражение для энергетических уровней позитрония примет вид

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{4\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда для энергии ионизации позитрония (при $n \to \infty$) получим

$$E_i = \frac{m_e e^4}{4\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \approx 6{,}77 \text{ эВ}.$$

Минимальное расстояние между электроном и позитроном найдем из выражения (6) для радиусов боровских орбит (при n = 1):

$$r_{\min} = \frac{8\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Задача 4. *Термоядерная реакция* ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + {}^1_1p$ *идет с выделением энергии* Q_1 *= 18,4 МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину* Q_1 *больше кинетической энергии исходных). Какая энергия* Q_2 *выделится в реакции* ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1p$, *если дефект масс ядра* ${}^3_2\text{He}$ *на* $\Delta M = 0{,}006$ *а.е.м. больше, чем у ядра* ${}^2_1\text{H}$*?*

Масса покоя любого ядра всегда меньше суммы масс покоя входящих в его состав нуклонов (протонов и нейтронов). Для количественной характеристики этого эффекта вводится специальная величина, называемая дефектом масс, – разность между суммой масс нуклонов, входящих в состав ядра, и массой самого ядра. В ядерной физике массы частиц принято измерять в энергетических единицах. Заданная в условии задачи величина ΔM = 0,006 а.е.м. соответствует энергии ΔMc^2 = 5,589 МэВ.

Дефект масс ядра гелия-3 (${}^3_2\text{He}$) равен

$$\Delta M_3 = 2m_p + m_n - M_3,$$

где m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, а M_3 – масса ядра гелия-3. Аналогично запишем дефект масс ядра дейтерия с массой M_2:

$$\Delta M_2 = m_p + m_n - M_2.$$

Из этих уравнений получим

$$\Delta M_3 - \Delta M_2 = \Delta M = m_p + M_2 - M_3.$$

Теперь рассмотрим данные термоядерные реакции. Так как число нуклонов в обеих реакциях не изменяется, энерговыделение в реакциях обусловлено изменением дефектов масс участвующих в реакции ядер. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$M_2c^2 + M_3c^2 = M_4c^2 + m_pc^2 + Q_1,$$

$$M_3c^2 + M_3c^2 = M_4c^2 + 2m_pc^2 + Q_2,$$

где M_4 – масса ядра гелия-4. Вычитая уравнения одно из другого, найдем искомую энергию:

$$Q_2 = Q_1 - \left(m_pc^2 + M_2c^2 - M_3c^2\right) = \\ = Q_1 - \Delta Mc^2 \approx 12{,}8 \text{ МэВ}.$$

Задача 5. *Ядерная реакция* ${}^4\text{He} + {}^{14}\text{N} \to {}^{17}\text{O} + p$ *может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота* α*-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию* $E_п$ *= 1,45 МэВ. На сколько энергия* α*-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся протонов могла быть равной нулю? Рассмотрите нерелятивистский случай.*

Поскольку данная реакция может идти только при энергиях, превышающих пороговую, это означает, что реакция идет с поглощением энергии (такие реакции называются эндотермическими). Очевидно, что в этом случае энергия покоя продуктов реакции больше энергии покоя исходных частиц. Обозначим эту разность через Q и назовем энергией реакции.

Рассмотрим случай, когда налетающая α-частица обладает кинетической энергией, равной пороговой энергии $E_п$, т.е. когда $p_\alpha^2/\left(2m_\alpha\right) = E_п$, где p_α – импульс α-частицы, а m_α – ее масса. В этом случае продукты реакции будут двигаться как единое целое, т.е. с одной и той же скоростью, которую обозначим через u. Запишем закон сохранения энергии:

$$E_п = \frac{M_O u^2}{2} + \frac{m_p u^2}{2} + Q$$