т.е. уменьшится в N^3 раз. Излучаемая при ускоренном движении заряда мощность пропорциональна величине этого заряда и квадрату его ускорения (если это вам не известно, то можно воспользоваться методом размерностей и проверить сказанное). Итак, излучаемая в модели мощность будет равна

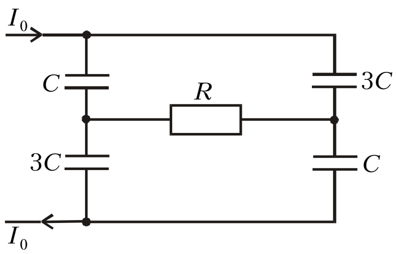
$$P^* = P\frac{N}{N^6} = \frac{P}{N^5}$$

и энергия «электрона» будет израсходована за время

$$\tau^* = \tau\frac{N^5}{N} = \tau N^4 .$$

А.Зильберман

Ф1695. *В схеме на рисунке конденсаторы вначале не заряжены. Напряжение во внешней цепи непрерывно изменяют так, чтобы ток в этой цепи оставался равным I_0. Какое количество теплоты выделяется в резисторе за время T?*



Вначале решим задачу приближенно. Если с момента включения прошло немного времени, конденсаторы зарядились до небольших напряжений и ток через резистор мал. Тогда этим током можно просто пренебречь, а цепочки конденсаторов считать разделенными. При этом в каждую цепочку течет половинный ток, т.е. $0{,}5I_0$, и напряжение каждой цепочки, а значит и напряжение источника, растет со временем по закону

$$U(t) = \frac{0{,}5I_0t}{C_{\text{общ}}} = \frac{2I_0t}{3C} .$$

Это соотношение остается справедливым при малом токе через резистор, а ток определяется напряжением в диагонали «мостика» из конденсаторов – при малом токе напряжение составляет половину приложенного к схеме напряжения $U(t)$ (напряжение конденсатора емкостью C составляет три четверти этого напряжения, а конденсатора емкостью $3C$ – одну четверть). Тогда условие для малости тока резистора запишется в виде

$$\frac{0{,}5U(t)}{R} = \frac{I_0t}{3RC} \ll I_0 ,$$

а для времени –

$$t \ll 3RC ,$$

где R – сопротивление резистора.

Через достаточно большое время после включения цепи (т.е. при $t \gg RC$) ток через резистор практически перестанет увеличиваться (его величина монотонно возрастает, но ограничена сверху). Это означает, что напряжения конденсаторов емкостями C и $3C$ за одинаковые интервалы увеличиваются одинаково и отношение токов равно отношению емкостей. Следовательно, ток зарядки конденсатора емкостью C (точнее, двух таких конденсаторов – ясно, что в данной симметричной схеме одинаковые конденсаторы заряжаются одинаково) равен $0{,}25I_0$, а ток конденсатора емкостью $3C$ составляет $0{,}75I_0$. За время Δt напряжение схемы увеличится на $2 \cdot 0{,}25I_0\,\Delta t/C$. Если начальным напряжением схемы пренебречь – вначале напряжение нарастало примерно с такой же скоростью, но в течение короткого времени, – то можно считать

$$U(t) = \frac{0{,}5I_0t}{C} .$$

Ток через резистор при этом составит $0{,}5I_0$, и за большой интервал времени T на резисторе выделится в виде тепла энергия

$$W = 0{,}25I_0^2RT .$$

Получим теперь точное решение задачи. Введем обозначения: q – заряд конденсатора емкостью C, J – ток зарядки этого конденсатора, Q – заряд конденсатора емкостью $3C$, $(I_0 - J)$ – его ток зарядки. Ток I резистора определяется разностью напряжений «нижних» конденсаторов:

$$\frac{q}{C} - \frac{Q}{3C} = IR = \left(I_0 - 2J\right)R .$$

Приравняем производные левой и правой частей этого уравнения и учтем при этом, что $q' = J$, $Q' = I_0 - J$:

$$\frac{J}{C} - \frac{I_0 - J}{3C} = -2J'R .$$

После простых преобразований получим

$$-1{,}5RCJ' = J - 0{,}25I_0 .$$

Избавимся от постоянной добавки в правой части уравнения – вместо переменной величины J возьмем $J_1 = J - 0{,}25I_0$ (производная при этом не изменится, но уравнение станет проще, а потом мы эту поправку «учтем назад»):

$$J_1' = \frac{J_1}{-1{,}5RC} .$$

Если вы умеете решать такие уравнения, то очень хорошо, а если нет — будем решать его вместе.

Итак, что это за функция времени, которая при взятии от нее производной остается самою собой, но появляется множитель $1/(-1{,}5RC)$? Таким свойством, как известно, обладает экспонента:

$$J_1(t) = A\exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right).$$

Величину множителя A найдем, пользуясь начальным значением найденной функции. В «приближенном» решении мы установили, что сразу после включения цепи ток зарядки конденсатора меньшей емкости $J(0)$ равен половине тока I_0, тогда

$$A = 0{,}5I_0 - 0{,}25I_0 = 0{,}25I_0 .$$

Теперь запишем полученное выражение для тока зарядки конденсатора:

$$J(t) = 0{,}25I_0\left(1 + \exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right)\right).$$

Дальше мы найдем заряд конденсатора емкостью C как функцию времени – для этого достаточно проинтегрировать по времени полученное выражение для тока:

$$q(t) = \frac{0{,}25I_0t}{C} + 0{,}25I_0\left(1{,}5RC - 1{,}5RC\exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right)\right).$$