*строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих в каждой строке, равна сумме произведений чисел, стоящих в каждом столбце.*

Нашу таблицу из $3n$ чисел будем называть матрицей $M$. Нужно доказать, что оговоренные в условии суммы $S_1$ и $S_2$ равны.

Каждая из этих сумм состоит из $n$ слагаемых вида $xyz$, где $x + y + z = h$; при этом $h$ постоянно для всех слагаемых. Можно записать $xyz = (h - y - z)(h - x - z)(h - x - y)$. Совершив элементарные преобразования с этим равенством, мы получим новое равенство, которое позволит нам решить задачу:

$$6xyz = h^3 - 3h\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right). \quad (*)$$

Обозначим через $A$ сумму квадратов всех чисел матрицы $M$, а через $B$ – сумму кубов этих чисел. В силу $(*)$ можно записать

$$6S_1 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

а также

$$6S_2 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

т.е. окончательно – требуемое равенство:

$$S_1 = S_2.$$

*В.Произволов*

**М1679.** *Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задаются следующим образом. Выбираются два произвольных числа $a_0 > 0$ и $b_0 < 0$. Числа $a_{n+1}$ и $b_{n+1}$ принимаются равными, соответственно, положительному и отрицательному корням уравнения $x^2 + a_n x + b_n = 0$. Найдите пределы обеих последовательностей.*

Воспользовавшись теоремой Виета, получаем

$$a_n = -\left(a_{n+1} + b_{n+1}\right) = a_{n+2} + b_{n+2}\left(1 - a_{n+2}\right).$$

Так как $b_{n+2} < 0$, отсюда следует, что либо $1 < a_{n+2} < a_n$, либо $1 > a_{n+2} > a_n$, и, значит, последовательности, составленные из четных и нечетных членов $a_n$, монотонны и ограничены. Обозначим их пределы, соответственно, $A_0$, $A_1$. Теперь, поскольку $b_n = -\left(a_n + a_{n+1}\right)$, последовательность $b_n$ имеет предел, равный $B = -\left(A_0 + A_1\right)$. Переходя к пределу в равенстве $b_n = a_{n+1}b_{n+1}$, получаем $B = B \cdot A_0 = B \cdot A_1$.

Если $B = 0$, то $\left(A_0 + A_1\right) = 0$, что невозможно, так как $A_0$, $A_1$ положительны. Следовательно, $A_0 = A_1 = 1$, $B = -2$.

*А.Заславский, А.Поспелов*

**М1680.** *Числовая последовательность задается равенством $x_n = n^3 + C$, где $n$ принадлежит натуральному ряду.*

*а) Пусть $C$ – натуральное число. Докажите, что любые три идущие подряд члена последовательности не имеют общего делителя (отличного от 1).*

*б) Пусть $C$ является кубом натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.*

*в)* Существует ли такое натуральное число $C$, что любые соседние члены последовательности взаимно просты?*

а) Предположим противное, и пусть $p$ – простой общий делитель некоторых трех чисел $x_n$, $x_{n+1}$, $x_{n+2}$. Число $p$ делит и числа $x_{n+1} - x_n$ и $x_{n+2} - x_{n+1}$, а значит, и число

$$\left(x_{n+2} - x_{n+1}\right) - \left(x_{n+1} - x_n\right) = \left(3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\right) - \left(3n^2 + 3n + 1\right) = 6(n+1).$$

Но из трех чисел $x_n$, $x_{n+1}$ и $x_{n+2}$ ровно одно делится на 3 и хотя бы одно нечетно; значит, $p$ делит $n + 1$. С другой стороны, $p$ делит $x_{n+1} = (n+1)^3 + C$, откуда $p$ делит $C$. Далее, поскольку число $p$ делит $x_n = n^3 + C$, то оно делит и $n$. Но НОД$(n + 1, n) = 1$. Противоречие.

б) Решение этого пункта содержится в решении пункта в).

в) Нет, не существует. Докажем это.

Любой общий простой делитель чисел $n^3 + C$ и $(n+1)^3 + C$ делит также и число $27C^2 + 1$. Это доказывается непосредственно, с помощью алгоритма Евклида.

Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, при нечетном $C$ число $27C^2 + 1$ четно. В то же время разность $x_{n+1} - x_n = 3n(n+1) + 1$ – число всегда нечетное.

Разберемся теперь, как обстоит дело с нечетными делителями; докажем вначале, что у любого числа $27C^2 + 1$, где $C$ – натуральное, нечетный простой делитель есть.

**Лемма.** Уравнение $27C^2 + 1 = 2^k$ не имеет решений в натуральных числах.

**Доказательство леммы.** Очевидно, число $C$ не может быть четным. При нечетном $C$ воспользуемся следующим очевидным преобразованием:

$$27C^2 + 1 = 28C^2 - (C-1)(C+1).$$

Число $(C-1)(C+1)$ делится на 8, а число $28C^2$ – не делится. Следовательно, $2^k \le 4$; но $27C^2 + 1 \ge 28$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем теперь, что любой нечетный простой делитель $p$ числа $27C^2 + 1$ годится: существует такое $n(p)$, что и $x_n$, и $x_{n+1}$ делятся на $p$. Чтобы показать это, нам будет удобнее оперировать не с самими числами, а с остатками, которые они дают при делении на $p$. При таком подходе числа, дающие один и тот же остаток при делении на фиксированное натуральное число $m$ ($m \ge 2$), обычно отождествляют: их объединяют в единый «класс вычетов по модулю $m$». Обозначают это так: $a \equiv b \pmod m$. Очевидно, множество $Z_m$ классов вычетов по модулю $m$ содержит $m$ элементов; в качестве представителей этих классов часто бывает удобно рассматривать остатки $0, 1, \ldots, m-1$.

При любом $m > 1$ во множестве $Z_m$ естественным образом вводятся операции сложения, умножения и вычитания. А в $Z_p$ ($p$ – простое) можно также и делить. Именно, любое сравнение $x \cdot a \equiv b \pmod p$, где $a \not\equiv 0 \pmod p$, имеет, и притом единственное, решение $x$; его и обозначают как $\frac{b}{a} \pmod p$.

Подробнее обо всем этом можно прочесть в статье А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 год).

Как мы уже говорили, все вычисления мы будем проводить в $Z_p$, где $p$ – нечетный простой делитель числа $27C^2 + 1$. Для сокращения записи мы будем сравнения заменять равенствами: вместо $a \equiv b \pmod p$ мы будем писать просто $a = b$. В частности, при такой записи будет