пешком 1000 километров, нужно примерно 200 часов. А чтобы это подсчитать, достаточно секунды.

А как же все-таки решать задачу коммивояжера? Ну, во-первых, это уже относится к оптимизации, а не к элементарной комбинаторике. А во-вторых, на сегодня никто не знает по-настоящему быстрого алгоритма решения этой знаменитой и важной (к ней сводятся многие другие) задачи. Вполне возможно, что такого алгоритма вообще не существует.

Помимо прочего, комбинаторика обычно позволяет быстро оценить, что реально, а что нет, – особенно, когда речь идет об алгоритмах переборного типа. Жизнь, как известно, дается только раз, и не стоит тратить ее, сидя перед компьютером, перебирающим 19! маршрутов.

Когда нужно заниматься ненужным

Пусть имеется известное число N объектов и требуется выяснить, сколько из них обладает определенным свойством. Искомое число «нужных» объектов обозначим через $N_1 (\le N)$. Как видно из предыдущего, множество нужных объектов часто имеет простую структуру, позволяющую применить принцип умножения. А если это не так – как в таком случае искать N_1?

Как правило, полезно проверить множество «ненужных» (т.е. не обладающих требуемым свойством) объектов – не имеет ли оно простой структуры. Если для него удастся применить принцип умножения, то будет найдено число N_2 ненужных объектов, после чего легко определяется и $N_1 = N - N_2$. Приведем пример.

Задача 5. *Сколько существует m-буквенных слов в русском алфавите, содержащих букву А?*

Всего m-буквенных слов, как мы знаем, $N = 33^m$. Попробуем подсчитать, сколько среди них нужных (содержащих A), принципом умножения. Сначала все идет хорошо: на 1-м, 2-м, ..., $(m-1)$-м месте могут стоять по 33 буквы, независимо от предыдущих. Увы, на последнем шаге рушится все: если среди предыдущих была буква A, то для m-й буквы имеем опять-таки 33 варианта, если нет – всего 1 вариант (буква A).

Зато простой структурой обладает множество ненужных (не содержащих A) слов – ведь это всевозможные m-буквенные слова в 32-буквенном алфавите! Всего их $N_2 = 32^m$, стало быть, искомое число $N_1 = 33^m - 32^m$.

Изложенный прием перехода к дополнительному множеству (к множеству «ненужных» объектов) по идее очень прост и не понять его невозможно. А вот забыть про него очень легко, все внимание часто сосредотачивается на «нужных» объектах. В рассмотренной задаче, например, напрашивается такой путь: разбить все нужные слова на m типов – содержащие ровно одну букву A, ровно две и т.д., попытаться подсчитать число слов каждого типа, а затем сложить результаты. Можно и на этом пути получить решение, правда в громоздком виде. Но это значило бы ломиться в открытую дверь – ведь переход к дополнительному множеству дает ответ сразу и в простейшем виде.

К сожалению, довольно часто оказывается, что ни множество нужных объектов, ни дополнительное к нему не обладают простой структурой. Это значит, что задача не сводится к простому применению принципа умножения и нужны новые идеи. Одна из них излагается в следующем пункте.

«Растождествление» и перестановки с повторениями

Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно точно передает суть дела. Воспользуемся тем, что комбинаторика позволяет считать словом любую комбинацию букв...

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – различные буквы некоторого алфавита. Рассматривается следующая задача.

Задача 6. *Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – заданные натуральные числа, сумма которых равна n. Сколько существует n-буквенных слов, содержащих n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, ..., n_k букв A_k?*

В частном случае $n_1 = \ldots = n_k = 1$, $k = n$ это знакомая нам задача о числе перестановок. Но если хотя бы одно из чисел n_k больше 1, возникает нечто новое – перестановки с повторениями. Как и в обычных перестановках, «буквенный состав» слов здесь заранее определен, так что варьируется лишь порядок. Но теперь среди букв есть тождественные (совпадающие, идентичные, неразличимые – все это одно и то же). Можно считать, что у нас есть n_i карточек с буквой A_i, $i = 1, \ldots, k$, и надо выяснить, сколько различных n-буквенных слов можно из них составить.

Задача эта несколько труднее предыдущих, решить ее уже знакомыми приемами не удастся. Основную идею решения лучше всего пояснить на конкретном примере.

Задача 7. *Сколько 7-буквенных слов можно составить из букв К,К,Л,Л,О,О,О?*

В данном случае число вариантов не слишком велико, и ответ можно получить прямым перебором. Все это потребовало бы времени и внимания – дабы ни одно слово не пропустить и ни одно не засчитать дважды (Сцилла и Харибда всех комбинаторных подсчетов!). Главное же – для решения общей задачи такой подсчет ничего не даст и будет, как сказал бы К.Прутков, «пустою забавою».

Вообще-то от перечня мы не отказываемся; более того, у нас их будет даже два – основной (куда входят нужные слова) и вспомогательный. Вот только реально составлять их мы не собираемся, «работать» с ними будем с помощью воображения. Что ж, не впервой.

Говорят, математики больше всего на свете любят сводить новые задачи к уже решенным. Здесь, к примеру – как хорошо бы применить знакомые способы подсчета числа перестановок! Жаль, не получается – тождественные буквы мешают, путаются друг с другом... А нельзя ли их «растождествить» – хотя бы временно – и посмотреть, что получится? В случае с карточками это особенно естественно – ведь наши 7 карточек действительно физически различны (мы отождествили их, так сказать, искусственно).

Сказано – сделано. После индексации получаем 7 различных букв $К_1$, $К_2$, $Л_1$, $Л_2$, $О_1$, $О_2$, $О_3$. Из них, как мы знаем, можно составить 7! различных 7-буквенных слов. Они и образуют вспомогательный перечень.

Он, очевидно, «раздут» по сравнению с основным: если взять какое-нибудь слово основного перечня – например *КОЛОКОЛ*, то ему будет соответствовать много слов вспомогательного перечня:

$$К_1О_1Л_1О_2К_2О_3Л_2,\ К_2О_1Л_2О_3К_1О_2Л_1$$

и т.д.

Оказывается, нетрудно вычислить, во сколько раз вспомогательный пе-