LXII Московская математическая олимпиада

Избранные задачи окружного тура

1. К Саше в день рождения пришли 5 друзей. Первому он дал $1/6$ часть пирога, второму – $1/5$ часть остатка, третьему – $1/4$ часть того, что осталось, четвертому – $1/3$ нового остатка, пятому – $1/2$ последнего остатка. Кто из друзей Саши получил самый большой кусок пирога? (5)[1]

А.Шевкин

2. В левом нижнем углу листа клетчатой бумаги стоит шахматный конь. Ему разрешается делать прыжки только двух видов: либо на две клетки вверх, а затем на клетку вправо, либо на две клетки вправо, а затем на клетку вверх. Конь попал в клетку, расположенную на 40 клеток правее и на 50 клеток выше исходного положения. За сколько прыжков он это сделал? (5, 6)

Б.Чамов

3. Раскрасьте клетки доски 4×4 в 4 цвета так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, каждом вертикальном ряду и на каждой из двух диагоналей оказались клетки, покрашенные в каждый из четырех цветов. (5)

А.Спивак

4. Разрежьте плоскость 6 прямыми так, чтобы все пары прямых пересекались в разных точках, а среди получившихся частей оказалось ровно 4 треугольника. (6, 7)

А.Ковальджи

5. Разрежьте квадрат 5×5 клеток по линиям сетки на 7 различных прямоугольников (прямоугольники считаются различными, если их нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совпали). (7)

И.Рубанов

6. В классе 24 ученика. Каждый из них любит либо физику, либо лирику, либо и то и другое. Оказалось, что среди любителей физики 20% любителей лирики, а среди любителей лирики – 25% любителей физики. Сколько учеников любят одновременно и физику, и лирику? (7)

А.Ковальджи

[1] *В скобках указаны классы, в которых предлагалась задача.*

7. Длины сторон треугольника – целые числа. Длина одной стороны равна 5, другой – 1. Найдите длину третьей стороны. (8)

И.Таирова

8. В клетчатом квадрате размером 5×5 расставьте 5 единиц, 5 двоек, 5 троек, 5 четверок и 5 пятерок так, чтобы сумма чисел в любом квадрате размером 2×2 (со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата) была одна и та же. (8)

А.Спивак

9. Два круга, площади которых 1 кв. см и 5 кв. см, пересекаются. S_1 – площадь той части меньшего круга, которая не входит в больший круг; S_2 – площадь той части большего круга, которая не входит в меньший. Найдите разность площадей $S_2 - S_1$. (10)

И.Таирова

10. Числа a, b, c, d таковы, что при любых значениях x выполняется равенство

$$3(x+a)^4 = (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4.$$

Докажите, что $a = b = c = d$. (10, 11)

А.Ковальджи

11. В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число. (10)

В.Сендеров

12. В телесериале «Математики тоже плачут» 15 героев. В каждой серии с одним из героев происходит одно из трех событий: либо он узнает тайну, либо он узнает, что другой герой знает тайну, либо он узнает, что другой герой не знает тайны. Каково максимально возможное число серий? (Тайна одна, изначально ее никто не знает, про каждых двух героев A и B серия типа «A узнал, что B тайны не знает» бывает только одна.) (10)

А.Канель

13. Дан график гиперболы $y = 1/x$. Проведены 100 вертикальных прямых через точки $x = 1, 2, 3, \ldots, 100$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ – точки пересечения прямых с гиперболой. Построены 99 прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, для которых отрезки A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{99}A_{100}$ являются диагоналями. Найдите сумму площадей этих прямоугольников. (11)

Д.Александров

14. Цилиндрическую кружку диаметром 2 и высотой 2, наполненную доверху водой, отклонили от вертикали на 30° (угол между осью кружки и вертикалью). Какая доля воды выльется? (11)

Фольклор

15. В окружность диаметром 1 вписали правильный 10-угольник и отметили на окружности произвольную точку. Найдите сумму квадратов расстояний от этой точки до вершин 10-угольника. (11)

Е.Юрченко

Городская олимпиада

6 класс

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке. Такое «уплотнение» повторили еще дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

Д.Калинин

2. Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение – 420.

Д.Калинин

3. Квадрат 4×4 разделен на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в черный и белый цвета так, чтобы у каждой черной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один черный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Фольклор

4. Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, затем 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее ее или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

Фольклор

5. Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

Р.Гордин

6. На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала часть черного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

В.Гуровиц

7 класс

1. Числитель и знаменатель дроби – целые положительные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит $1/3$. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

Р.Федоров

2. Разрежьте данную фигуру (рис.1) по границам клеток на три равные

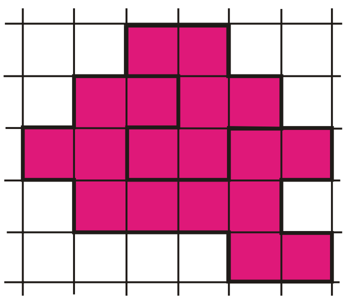

Рис. 1

(одинаковые по форме и величине) части.

Д.Калинин

3. См. задачу 4 для 6 класса.

4. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из A в B, другой – из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в B в 4 часа вечера, а другой – в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

Фольклор

5. См. задачу 5 для 6 класса.

6. Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных.

В.Произволов

8 класс

1. Сравнив дроби $x = \dfrac{111110}{111111}$, $y = \dfrac{222221}{222223}$, $z = \dfrac{333331}{333334}$, расположите их в порядке возрастания.

Фольклор

2. Покажите, как любой четырехугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией).

В.Произволов

3. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

В.Произволов, В.Сендеров

4. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

А.Толпыго

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O – середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC – точка N так, что угол MON – прямой. Докажите, что $AM^2 + CN^2 = MN^2$.

В.Произволов

6. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую – черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, за поражение – 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

Б.Френкин

9 класс

1. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.

(Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\dfrac{a+b}{2}$, а средним гармоническим – число $2\Big/\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.)

А.Канель

2. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A и $Б$ (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т.е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

В.Изместьев

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O, B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O, C, касается прямой CD.

А.Заславский

4. Найдите все такие целые положительные k, что число $\underbrace{1\ldots1}_{2000}\overbrace{2\ldots2}^{k}-\underbrace{2\ldots2}_{1001}$ является квадратом целого числа.

Е.Осьмова

5. Вписанная окружность треугольника ABC ($AB > BC$) касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно, RS – средняя линия, параллельная AB, T – точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника.

М.Евдокимов

6. В соревнованиях по n-борью участвуют 2^n человек. Для каждого спортсмена известна его сила в каждом из видов программы. Соревнования проходят следующим образом: сначала все спортсмены участвуют в первом виде программы и лучшая половина из них выходит в следующий круг. Эта половина принимает участие в следующем виде и половина из них выходит в следующий круг, и т.д., пока в n-м виде программы не будет определен победитель. Назовем спортсмена «возможным победителем», если можно так расставить виды спорта в программе, что он станет победителем.

а) Докажите, что может так случиться, что хотя бы половина спортсменов является «возможными победителеми»;

б) докажите, что всегда число «возможных победителей» не превосходит $2^n - n$;

в) докажите, что может так случиться, что «возможных победителей» ровно $2^n - n$.

А.Герко

10 класс

1. Известно, что $(a + b + c)c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

Фольклор

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в

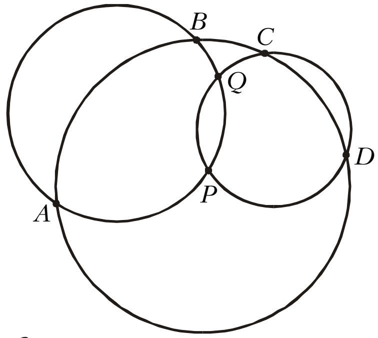

Рис. 2

точках A и B, а вторую – в точках C и D (рис.2). Докажите, что углы AQD и BQC равны.

А.Заславский

3. Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$.

С.Злобин

4. $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных. В синие секторы, начиная с некоторого, подряд записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n. В красные секторы, начиная с некоторого, записываются те же числа и таким же образом, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n.

В.Произволов

5. Кузнечик прыгает по отрезку [0; 1]. За один прыжок он может попасть из точки x либо в точку $x/\sqrt{3}$, либо в точку $x/\sqrt{3} + (1 - 1/\sqrt{3})$. На отрезке [0; 1] выбрана точка a. Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше $1/100$ от точки a.

А.Буфетов

6. Для чисел 1, …, 1999, расставленных по окружности, вычисляется сумма произведений всех наборов из 10 чисел, идущих подряд. Найдите расстановку чисел, при которой полученная сумма наибольшая.

Д.Дерягин

11 класс

1. a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

В.Сендеров

2. Плоская выпуклая фигура ограничена отрезками AB и AD и дугой BD

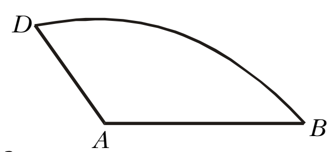

Рис. 3

некоторой окружности (рис.3). Постройте какую-нибудь прямую, которая делит пополам: а) периметр этой фигуры; б) ее площадь.

В.Произволов, В.Сендеров

3. Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и черный цвета. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Д.Терешин

4. На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

А.Буфетов, А.Канель

5. Граф – это набор вершин, причем некоторые из них соединены ребрами (каждое ребро соединяет ровно две вершины графа). Раскраска вершин графа называется правильной, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, причем его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.

Н.Чернятьев

6. Решите в натуральных числах уравнение $\left(1 + n^k\right)^l = 1 + n^m$, где $l > 1$.

Г.Челноков, В.Сендеров

7. Докажите, что первые цифры чисел вида 2^{2^n} образуют непериодическую последовательность.

А.Канель

Публикацию подготовили В.Бугаенко, А.Ковальджи, В.Сендеров, Р.Федоров, А.Шень, И.Ященко