Сверхзвук на кончике бича

Г.МЕЛЕДИН

Чуть помедленнее, кони, чуть помедленнее!
Не указчики вам кнут и плеть...

В.С.Высоцкий

В НАШИ СТРЕМИТЕЛЬНО БЕГУЩИЕ дни ассоциации, связанные со словами «бич», «кнут», «плеть», не из приятных. Хотя можно вообразить и идиллическую картину: сонный, расплавленный жарой воздух, нависший над зеленью луга, вдруг разрывает резкий щелчок кнута, и стадо лениво поднимается, подчиняясь пастуху. Но нас будет интересовать лишь то, каким образом сравнительно небольшими усилиями можно добиться очень высоких скоростей, пусть на небольшом участке кнута, приводящих к характерному звуку.

Итак, о кнуте, видимо, слышали все, но лишь немногие держали его в руках, пробовали в действии и представляют реально, что при этом происходит.

Обычно кнут представляет собой короткую палку-кнутовище, к концу которой прикреплен сплетенный из кожи или жгута длинный (несколько метров), прочный, с уменьшающимся к свободному концу сечением собственно кнут. Взмахом сообщают кнуту скорость, а потом резким движением кнутовища вызывают движение прикрепленной к нему части кнута в противоположную сторону. Через некоторое время раздается сильный щелчок (если кнут непрочный, то в этот момент часть его может оторваться). Оказывается, щелчок возникает, когда величина скорости у конца кнута переходит через значение скорости звука (как при переходе звукового барьера сверхзвуковым самолетом). Это получается вследствие того, что начальная кинетическая энергия концентрируется на все уменьшающемся движущемся отрезке кнута – кнутовище и остальная часть кнута, прикрепленная к нему, при этом неподвижны. Быстро растет плотность кинетической энергии, и, соответственно, нарастает скорость.

Все это можно рассчитать, что мы и сделаем, разобрав предварительно две задачи, в чем-то перекликающиеся с задачей о кнуте.

Задача о «сифоне-цепочке». Через гвоздь перекинули тонкую длинную цепочку с малыми неупругими звеньями так, что часть цепочки лежит на краю стола высотой h, а часть – на полу (рис.1). С какой установившейся скоростью будет двигаться цепочка после того, как ее отпустят?

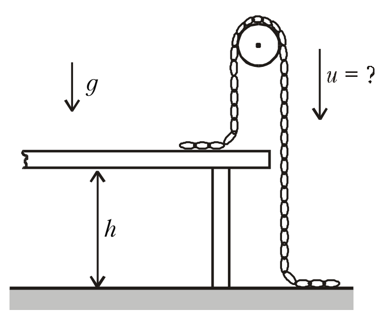

Рис. 1

Введем линейную плотность цепочки $\rho = M/L$, где M – ее масса, а L – длина. Пусть установилась скорость u. Тогда за малое время Δt в движение вовлекается масса $\Delta m = \rho u \Delta t$, скорость которой изменяется от 0 до u, а импульс – от 0 до $\Delta p = \Delta m u = \rho u^2 \Delta t$. Этот импульс сообщает массе Δm сила тяжести $\rho h g$, действующая на неуравновешенную часть цепочки. Исходя из второго закона Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}u + m\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Так как рассматривается движение с установившейся скоростью, имеем

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t}u = \frac{\rho u^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho u^2 = \rho g h.$$

Отсюда получаем

$$u = \sqrt{gh}.$$

Заметим, что закон сохранения энергии $\Delta m g h = \Delta m u^2/2$ дает неправильный результат, так как часть приобретаемой при спуске энергии (ровно половина) теряется при неупругом ударе цепочки о пол.

Отметим также, что, если убрать гвоздь, т.е. рассматривать задачу о соскальзывании цепочки с края стола на пол, для нахождения установившейся скорости ни в решении, ни в ответе ничего не изменится.

Задача о нити в трубке. Внутри U-образной трубки массой M, находящейся на гладком столе, движется нерастяжимая нить массой m (рис.2; вид сверху). В начальный момент в каждом колене трубки находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость конца A нити была равна v_0, а скорость конца B – нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Движение трубки допускается только вдоль ее прямолинейных участков, радиус трубки считать очень малым. Трением пренебречь.

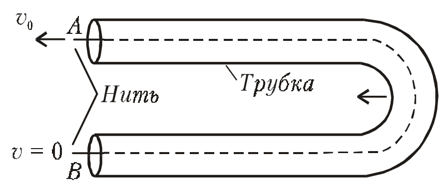

Рис. 2

Так как нить нерастяжима, заданное в начальный момент соотношение скоростей для концов нити возможно лишь при условии, что скорость u_0 трубки относительно стола в этот момент равна $v_0/2$ и направлена в ту же сторону, что и скорость конца нити A.

Перейдем в систему отсчета, где начальная скорость трубки равна нулю. В этой системе половина нити с концом A имеет скорость $v_0/2$, импульс $(m/2)(v_0/2)$ и кинетическую энергию $(m/2)(v_0/2)^2/2$. А половина нити с концом B имеет скорость $-v_0/2$, импульс $-(m/2)(v_0/2)$ и кинетическую энергию $(m/2)(v_0/2)^2/2$. Таким образом, вначале в этой системе отсчета полный импульс нити, а также импульс и кинетическая энергия трубки равны нулю. Энергия нити при этом равна $mv_0^2/8$. Пусть после вылета нити из трубки скорость нити равна v, а скорость трубки равна u. Тогда законы сохранения импульса и энергии можно записать следующим образом:

$$0 = Mu + mv, \quad \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \frac{v_0}{2}.$$

Знак «минус» выбран в соответствии с законом сохранения импульса, из которого следует, что скорости $\vec{u}$ и $\vec{v}$ направлены в противоположные стороны.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную со столом, находим искомую скорость трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}\left(1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\right).$$

Задача о кнуте. Пусть вначале, двигая кнутовище со скоростью v_0 влево, такую же скорость сообщают всему кнуту по всей длине L, а потом, резко сдвинув кнутовище вправо, удерживают его неподвижно, прикладывая некоторую силу. Тогда длина l движущейся части кнута будет уменьшаться, а скорость v – увеличиваться. При каком значении l скорость v достигнет величины скорости звука $v_{зв}$ (рис.3)?

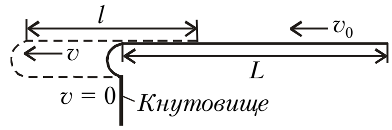

Рис. 3

Сначала для упрощения рассмотрим однородный кнут с массой M и длиной L, т.е. с линейной плотностью $\rho = M/L$. Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\rho L v_0^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2},$$

или

$$v = v_0\sqrt{\frac{L}{l}}.$$

(Между прочим, отсюда видно, что при уменьшении l до нуля скорость v неограниченно растет.) Таким образом, получаем связь

$$v = -\frac{dl}{dt} = \frac{v_0 L^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

Знак «минус» обусловлен уменьшением длины с течением времени. Запишем связь иначе:

$$l^{1/2}dl = -v_0 L^{1/2}dt$$

и проинтегрируем левую и правую части по интервалу времени t, за который длина движущейся части кнута меняется от L до l:

$$\int\limits_L^l l^{1/2}dl = \left.\frac{l^{3/2}}{3/2}\right|_{l=L}^{l=l} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(l^{3/2} - L^{3/2}\right) = -v_0 L^{1/2} t.$$

Отсюда получаем

$$l = L\left(1 - \frac{3}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{2/3},$$

или, с учетом соотношения $v = v_0 L^{1/2}/l^{1/2}$, –

$$v = v_0\left(1 - \frac{3}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{-1/3}.$$

Формально при $t = 2L/(3v_0)$ скорость v стремится к бесконечности, а длина l – к нулю. Однако это получается при бесконечно тонком однородном кнуте, что нереалистично.

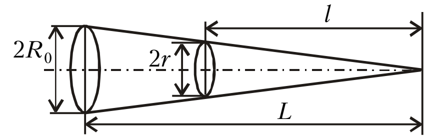

Рис. 4

Рассмотрим теперь более реальный вариант: кнут с линейно уменьшающимся, от кнутовища к концу, радиусом кругового сечения. Из подобия треугольников на рисунке 4 следует $r = R_0 l/L$. Повторяя предыдущую схему рассуждений, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \rho\frac{\pi R_0^2 L}{3}\frac{v_0^2}{2} = \rho\frac{\pi r^2 l}{3}\frac{v^2}{2},$$

откуда, с учетом связи $r = R_0 l/L$, получаем

$$v = v_0\left(\frac{L}{l}\right)^{3/2}.$$

Тогда

$$l = L\left(1 - \frac{5}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{2/5}, v = \frac{v_0}{\left(1 - \frac{5}{2}\frac{v_0 t}{L}\right)^{3/5}}.$$

Оценим, при какой длине l скорость v достигает значения скорости звука $v_{зв} \approx 330$ м/с. Положив $L = 5$ м, $v_0 = 1$ м/с, получим

$$l = \frac{L}{\left(v_{зв}/v_0\right)^{2/3}} \approx \frac{5\text{ м}}{(330)^{2/3}} \approx \frac{5\text{ м}}{50} = 0{,}1\text{ м}.$$

Таким образом, при длине порядка 10 см от конца кнута происходит щелчок – переход звукового барьера.