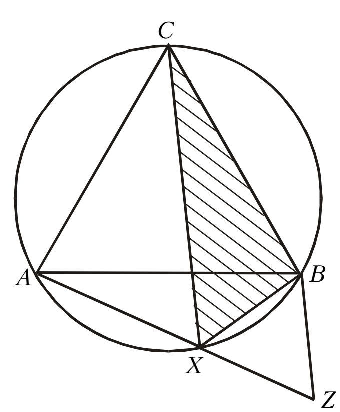
НАМ ПИШУТ

Еще два доказательства свойства правильного треугольника

В первом номере за 1999 год в статье «Вписанные многоугольники» тремя способами доказано, что если на дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка X, то $AX + BX = CX$ (см. рисунок).



Между тем есть еще два замечательных доказательства. Во-первых, мы можем построить на отрезке XB вовне правильный треугольник XZB. При повороте вокруг точки B на 60° точка C переходит в A, X – в Z, треугольник CXB – в треугольник AZB. Значит, $CX = AZ$. Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырехугольника $AXBC$ равна 180°, имеем $\angle AXB = 120°$, так что точки A, X, Z лежат на одной прямой. Следовательно,

$$AX + BX = AX + XZ = AZ = CX.$$

Во-вторых, можно бесхитростно применить теорему косинусов: обозначив $AB = BC = CA = l$, $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$, находим из ΔAXC и ΔCXB:

$$l^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60°,$$
$$l^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°.$$

Вычитая почленно, получаем $a^2 - b^2 - ac + bc = 0$, откуда

$$(a-b)(a+b-c) = 0.$$

Осталось разделить на $a - b$. (Случай $a = b$ легко разобрать отдельно.)

М.Панк