Задачи с проводящими сферами

А.ЧЕРНОУЦАН

Задачи на электростатику, в которых присутствуют одна или несколько проводящих сфер, традиционно оказываются трудными для многих абитуриентов. В особенности это относится к задачам на «перезарядку», где требуется выяснить, какие изменения произошли в системе при соединении отдельных проводников между собой. Большие трудности вызывают задачи на энергию системы проводников. Непреодолимым препятствием может оказаться и присутствие в задаче внешних зарядов (например, точечных), нарушающих сферическую симметрию системы.

Многие такие задачи решаются обычными школьными методами, в первую очередь – методом суперпозиции. Однако для успешного применения этих методов в задачах с проводящими сферами нужно хорошо понимать основные свойства проводников. А именно:

1) Проводник — это тело, в котором есть свободные заряды, способные перемещаться по объему проводника. В металлах, в частности, роль свободных зарядов играют электроны проводимости.

2) В электростатике рассматривается состояние равновесия системы, т.е. состояние, в котором отсутствует направленное движение зарядов (отсутствуют токи). Это означает, что напряженность электростатического поля в любой точке проводника должна быть равна нулю; в противном случае в окрестности этой точки немедленно начнется направленное движение свободных зарядов.

3) Все точки проводника имеют один и тот же потенциал, который называют потенциалом данного проводника. Поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность. Силовые линии поля вне проводника перпендикулярны к его поверхности.

4) Объемная плотность заряда внутри проводника равна нулю. Все нескомпенсированные заряды проводника находятся на его поверхности.

5) Если заданы заряды или потенциалы всех проводников системы, то можно найти только одно распределение зарядов на проводниках (и единственное распределение поля в пространстве между проводниками), соответствующее этим данным. Эта так называемая теорема единственности играет важную роль в электростатике.

6) Энергия уединенного проводника (энергия поля вокруг проводника) равна

$$W = \frac{1}{2} q\varphi ,$$

где q – заряд и φ — потенциал проводника. Энергия системы проводников равна

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i .$$

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Начнем с задачи о поле уединенной заряженной сферы.

Задача 1. *На уединенную проводящую сферу радиусом R нанесен заряд q. Найдите напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Вычислите потенциал сферы и ее энергию.*

Из соображений симметрии очевидно, что заряд по поверхности сферы распределен равномерно. Напряженность поля внутри сферы равна нулю, а вне сферы напряженность такая же, как у поля точечного заряда q, помещенного в центр сферы:

$$E = 0 \text{ при } r < R ,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ при } r > R .$$

Что касается потенциала, то его удобнее найти сначала во внешней области. Так как напряженность поля сферы совпадает с напряженностью поля точечного заряда, потенциалы этих полей могут различаться только константой, но, поскольку оба потенциала равны нулю на бесконечности, эта константа равна нулю. Следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \text{ при } r \ge R . \quad (1)$$

Из условия непрерывности потенциала делаем вывод, что потенциал внутри сферы (потенциал сферы) равен

$$\varphi_{\text{сф}} = \varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \text{ при } r \le R . \quad (2)$$

Полученные результаты для напряженности и потенциала изображены графически на рисунке 1. Отметим, что вычисление потенциала можно начинать не с внешней, а с внутренней области. Дело в том, что центр сферы

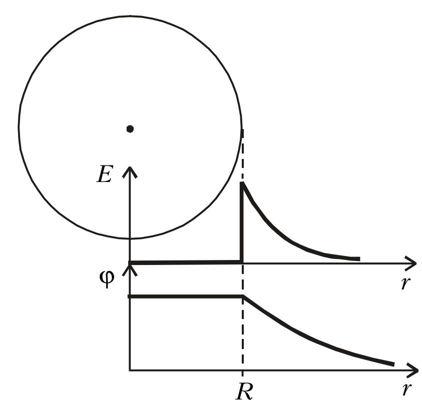

Рис. 1

находится на одном и том же расстоянии R от всех поверхностных зарядов, создающих поле, что позволяет легко вычислить потенциал в этой точке:

$$\varphi_{\text{ц}} = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} . \quad (3)$$

В данном случае такой подход выглядит менее естественным, но иногда он оказывается удобным.

Осталось вычислить энергию сферы:

$$W = \frac{1}{2} q\varphi_{\text{сф}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} .$$

Уместно лишний раз напомнить, что энергия сферы есть не что иное, как энергия электрического поля в пространстве вокруг сферы.

Задача 2. *Проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 находятся на большом* *расстоянии друг от друга. Первая сфера заряжена зарядом q, вторая не заряжена. Сферы соединяют длинной тонкой проволокой. Какие заряды окажутся на сферах после этого? Какое количество теплоты выделится в процессе перезарядки? Зарядом на проволоке пренебречь.*

После соединения система двух сфер вместе с проволокой будет представлять собой единый проводник. Значит, в результате перезарядки потенциалы сфер сравняются:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2'}{R_2},$$

где q_1' и q_2' — новые заряды сфер (рис.2). Полный заряд системы в ре-

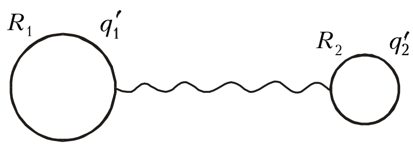

Рис. 2

зультате перезарядки не меняется, т.е.

$$q = q_1' + q_2'.$$

Из этих уравнений можно вычислить заряды q_1' и q_2':

$$q_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}q, \; q_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2}q.$$

Чтобы найти выделившееся количество теплоты, запишем закон сохранения энергии:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q,$$

подставим сюда выражения для начальной и конечной энергий:

$$W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1},$$

$$W_{\text{кон}} = \frac{q_1'^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2'^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

и получим искомую величину:

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}\frac{R_2}{R_1}.$$

В этой задаче при вычислении потенциалов и энергий можно было рассматривать каждую сферу как изолированную. Другая ситуация возникает в случае вложенных друг в друга концентрических сфер.

Задача 3. *Две тонкие концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) несут на себе заряды q_1 и q_2 соответственно. Вычислите потенциалы сфер и энергию системы. Какой заряд останется на внутрен-*

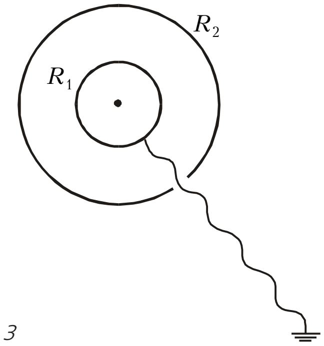

Рис. 3

ней сфере, если ее заземлить [1] *(рис.3)? Как изменится при этом энергия системы?*

Потенциал любой точки пространства можно найти по принципу суперпозиции — как сумму потенциала $\varphi_1(r)$, создаваемого зарядами первой сферы, и потенциала $\varphi_2(r)$, создаваемого второй сферой. Для каждой точки во внешней области ($r \geq R_2$) оба слагаемых надо вычислять по формуле (1) – получится потенциал поля точечного заряда. Значит, потенциал внешней сферы ($r = R_2$) равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{R_2}. \qquad (4)$$

В пространстве между сферами ($R_1 < r < R_2$) вклад внутренней сферы надо вычислять по формуле (1), а вклад внешней сферы — по формуле (2):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}.$$

Положив в этой формуле $r = R_2$, мы опять получим потенциал внешней сферы, а положив $r = R_1$, получим ответ для потенциала внутренней сферы:

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}. \qquad (5)$$

Такой же потенциал будет у всех точек при $r < R_1$.

Энергия этой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi(R_1) + \frac{1}{2}q_2\varphi(R_2) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{2q_1q_2}{R_2} + \frac{q_2^2}{R_2}\right).$$

Первый и третий члены представляют собой собственные энергии сфер, а второй член — энергию их взаимодействия.

После заземления внутренней сферы ее потенциал станет равным нулю. Применяя формулу (5), получим уравнение для нового заряда этой сферы:

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

откуда найдем

$$q_1' = -q_2\frac{R_1}{R_2}.$$

С помощью формулы (4) найдем теперь новый потенциал внешней сферы:

$$\varphi'(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1' + q_2}{R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2(R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Поскольку потенциал внутренней сферы теперь равен нулю, энергия системы в конечном состоянии равна

$$W' = \frac{1}{2}q_2\varphi'(R_2) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^2(R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Видно, что конечная энергия системы меньше начальной. Это и понятно. Уменьшение электростатической энергии системы равно тому количеству теплоты, которое выделилось при перезарядке.

Задача 4. *Три концентрические проводящие сферы имеют радиусы R, 2R и 3R. Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, заряд средней сферы равен q. В некоторый момент внутреннюю и внешнюю сферы соединяют проволокой (рис. 4). Какой заряд пройдет по*

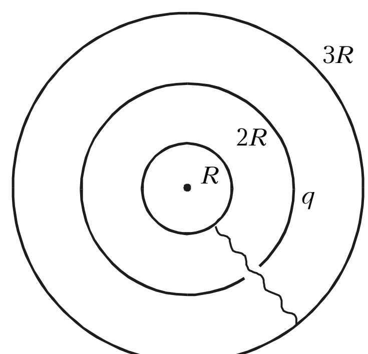

Рис. 4

этой проволоке, и какое при этом выделится количество теплоты?

Обозначим конечный заряд внешней сферы q', тогда заряд внутренней сферы будет $-q'$. Применяя метод суперпозиции аналогично тому, как мы это делали в задаче 3, вычислим конечные потенциалы внутренней и внешней сфер и приравняем их друг другу. Потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi'(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q'}{R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R}\right)$$

(для вклада от всех трех сфер можно

[1] *Заземляющая проволока проходит через маленькое отверстие во внешней сфере без контакта с ней.*

применять формулу (2) или найти потенциал центра – аналогично задаче 1). Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi'(3R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q'}{3R}+\frac{q}{3R}+\frac{q'}{3R}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{3R}.$$

Приравнивая потенциалы, находим

$$q'=\frac{q}{4}.$$

Именно такой заряд и пройдет по проволоке с внутренней сферы на внешнюю.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Начальная энергия системы равна просто энергии средней сферы, т.е.

$$W=\frac{1}{2}q\varphi(2R)=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$W'=-\frac{1}{2}q'\varphi'(R)+\frac{1}{2}q\varphi'(2R)+$$

$$+\frac{1}{2}q'\varphi'(3R)=\frac{1}{2}q\varphi'(2R)$$

(мы учли, что потенциалы внешней и внутренней сфер равны друг другу). Для конечного потенциала средней сферы запишем

$$\varphi'(2R)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q'}{2R}+\frac{q}{2R}+\frac{q'}{3R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{11q}{24R}$$

(для вклада внутренней сферы применяем формулу (1), а для вклада внешней – формулу (2)). Окончательно, выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q=W-W'=$$

$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2R}-\frac{11q^2}{24R}\right)=\frac{1}{192\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}.$$

В следующей задаче выясним, как изменяется потенциал проводящей сферы в присутствии точечного заряда.

Задача 5. *Проводящая сфера радиусом R заряжена зарядом Q. Каким станет потенциал сферы, если на расстоянии l от ее центра поместить точечный заряд q? Разобрать случаи l > R и l < R.*

На первый взгляд, эта задача гораздо труднее предыдущей, поскольку присутствие точечного заряда нарушает сферическую симметрию, и распределение заряда по поверхности сферы становится неравномерным. Действительно, получить полное описание, т.е. найти распределение зарядов на сфере и поле вокруг нее, совсем не просто, хотя и возможно. Это можно сделать, например, с помощью метода электростатических изображений, неоднократно описанного на страницах «Кванта» (последний раз – в №1 за 1996 г.). Однако ответить на поставленный в задаче вопрос можно довольно просто, опираясь на симметрию сферы и теорему единственности.

Начнем со случая $l > R$ (рис. 5). В этом случае потенциалы всех точек сферы одинаковые, и достаточно найти потенциал какой-нибудь одной точки. Ясно, что мы выберем центр сферы. Вклад зарядов, распределенных по поверхности сферы, вычисляется так же, как в задаче 1 (см. формулу (3)), и составляет $\sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q_i}{R}=$ $=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum\Delta Q_i}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ (поскольку в этом вычислении никак не используется равномерность распределения заряда – ответ зависит только от полного заряда сферы). Остается учесть вклад точечного заряда и записать

$$\varphi(R)=\varphi(0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}. \quad (6)$$

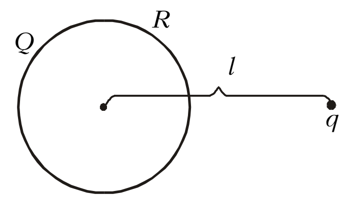

Рис. 5

Видно, что потенциал сферы при помещении рядом с ней точечного заряда изменился на величину потенциала, создаваемого этим зарядом в центре сферы. Во избежание недоразумений отметим, что существует *единственное* распределение зарядов по поверхности сферы, при котором потенциал *всех внутренних точек* сферы равен полученному значению.

Перейдем к случаю $l < R$ (рис. 6). Так как теперь заряд находится внутри сферы, напряженность поля внутри сферы не равна нулю и потенциалы различных точек не равны друг другу. Однако и в этом случае несложно определить потенциал сферы, только надо обратить внимание не на внутреннюю часть сферы, а на окружающее ее внешнее пространство. Оказывается, поле во внешнем пространстве не зависит от положения заряда q внутри сферы, т.е. при перемещении заряда по внутренней области поле во внешней области не меняется.

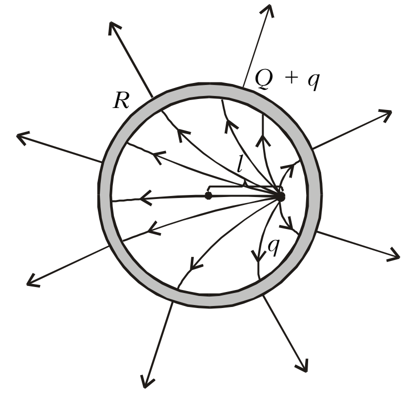

Рис. 6

Это утверждение верно для полого проводника любой формы, и следует оно из теоремы единственности. Поле во внешнем пустом пространстве однозначно определяется следующими условиями: 1) потенциал на бесконечности равен нулю; 2) потенциал на поверхности проводника принимает некоторое постоянное значение; 3) полный заряд внутри этой поверхности известен, т.е. известно полное число силовых линий, начинающихся на поверхности проводника. Существует единственное поле, удовлетворяющее этим условиям.

Для сферического проводника поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда $Q+q$. При этом заряд на сфере распределится следующим образом: на внутренней поверхности сферы будет находиться заряд $-q$, поскольку здесь заканчиваются все силовые линии, начинающиеся на заряде q, а на внешней поверхности сферы равномерно распределится заряд $Q + q$. Следовательно, потенциал сферы в этом случае равен

$$\varphi(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \quad (7)$$

и не зависит от расстояния l.

А теперь попробуем ответить на такой вопрос: *чему будет равен потенциал проводящей сферы, несущей заряд Q, в присутствии двух точечных зарядов* q_1 *и* q_2*, расположенных на расстояниях* l_1 *и* l_2 *от центра сферы* ($l_1 < R < l_2$)? Может показаться, что здесь нельзя применить ни одно из рассуждений, использованных в случае только одного заряда. Действительно, для первой части задачи было важно, что напряженность поля внутри сферы равна нулю, а для второй – что вне сферы нет зарядов. Но теорема единственности позволяет ответить на поставленный вопрос с помощью суперпозиции рассмотренных выше двух случаев расположения заряда относительно сферы.

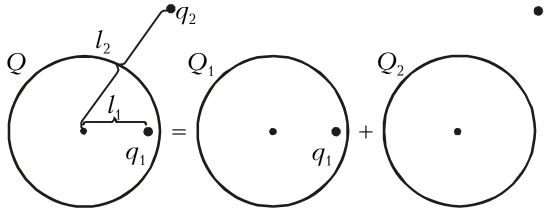

Рис. 7

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим заряд q_1 на расстоянии l_1 от сферы с зарядом Q_1, а затем – заряд q_2 на расстоянии l_2 от сферы с зарядом Q_2, при этом $Q_1 + Q_2 = Q$ (рис.7). Потенциал сферы в первом случае определяется формулой (7), а во втором случае — формулой (6). А теперь наложим первую систему на вторую. Так как потенциалы всех точек сферы были постоянными в каждом из случаев, при наложении систем они тоже будут постоянными, а заряд сферы будет равен Q. Следовательно, полученное при наложении распределение зарядов по поверхности сферы и будет правильным (теорема единственности). Для потенциала сферы получим

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{l_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R}.$$

Этот результат естественным образом обобщается на любое количество точечных зарядов. Интересно отметить, что отсюда следует своеобразная *эквивалентность* точечных зарядов и заряженных сфер в задаче, где требуется определить потенциал проводящей сферы. Поскольку вклад от точечного заряда в потенциал сферы зависит только от расстояния l между этим зарядом и центром сферы, потенциал сферы не изменится, если мы «размажем» этот заряд по поверхности воображаемой сферы радиусом l. Сравните, например, формулу (5) с формулой (6), а формулу (4) с формулой (7).

Задача 6. *Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Между сферами на расстоянии r от центра находится точечный заряд q. Какие заряды появятся на сферах, если их заземлить?*

Выразим потенциалы сфер и приравняем их к нулю. Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра, т.е.

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды сфер (после заземления). Поле во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда $q_1 + q + q_2$, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Теперь приравняем потенциалы обеих сфер к нулю, решим полученные уравнения и найдем искомые заряды:

$$q_1 = -q\frac{\dfrac{R_2}{r} - 1}{\dfrac{R_2}{R_1} - 1}, \quad q_2 = -q\frac{1 - \dfrac{R_1}{r}}{1 - \dfrac{R_1}{R_2}}.$$

Упражнения

1. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Внутренняя сфера заряжена зарядом q, внешняя сфера не заряжена. Каким станет потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить? Как изменится при этом энергия системы?

2. Имеются три концентрические проводящие сферы радиусами R_1, R и R_2 ($R_1 < R < R_2$). Среднюю сферу заряжают зарядом q, а внутреннюю и внешнюю сферы заземляют. Какие заряды появятся на этих сферах?

3. На расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиусом R помещают точечный заряд q. Какой заряд появится на сфере?

4. Проводящую сферу радиусом R заземляют, а на расстояниях $l_1 < R$ и $l_2 > R$ от ее центра помещают точечные заряды q_1 и q_2. Какой заряд появится на сфере?

5. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от их центра находится точечный заряд q. Какие заряды окажутся на сферах, если их соединить тонкой проволокой?