операции; y и y' – произведения чисел, содержащихся, соответственно, только в первой и только во второй группе, поменявшихся местами в результате операции. Тогда сумма произведений чисел в рассматриваемых двух группах до операции равна $s_1 = zxy + zx'y'$, а после операции $s_2 = zxy' + zx'y$. Имеем: $s_1 - s_2 = z(x-x')(y-y')$. Нетрудно видеть, что эта разность неположительна. Кроме того, если в результате операции не все числа остались на своих местах, то хотя бы для одной пары симметричных групп из 10 чисел эта разность строго отрицательна, что и доказывает лемму.

Решение задачи. Считаем числа 1, 2, …, 1999 расставленными так, что дуги между соседними числами равны. Пусть числа расставлены оптимальным образом, т.е. так, что сумма произведений десяток соседних чисел максимальна. Проведем диаметр через одно из чисел. Из леммы следует, что для всех пар чисел, симметричных относительно этого диаметра, меньшие числа расположены на одной полуокружности, а большие – на другой. С точностью до поворотов и осевых симметрий существует единственная расстановка чисел, обладающая этим свойством. Действительно, число 2 должно быть рядом с числом 1. Иначе найдется диаметр, отделяющий 2 от 1, причем числа 1 и 2 не симметричны относительно этого диаметра. Обозначим числа, симметричные числам 1 и 2 относительно этого диаметра, соответственно через A и B. Тогда $A > 1$ и $2 < B$, что противоречит лемме.

Далее строим искомую расстановку по индукции. Пусть мы доказали, что числа 1, 2, …, $2k$ при $1 \le k \le 998$ расставлены как в ответе, т.е. в порядке (для определенности по часовой стрелке) $2k$, $2k-2$, …, 2, 1, 3, …, $2k-1$ подряд. Обозначим через A и B, соответственно, числа, следующие за $2k$ против часовой стрелки и за $2k-1$ по часовой стрелке. Предположим, что число $2k+1$ отлично от A и B. Тогда пусть C – следующее за $2k+1$ по часовой стрелке число. C отлично от 1, 2, …, $2k$. Числа C и $2k-1$, а также $2k+1$ и B симметричны относительно некоторого диаметра, но $C > 2k-1$, а $2k+1 < B$ – это противоречие. Предположим теперь, что число $2k+2$ отлично от A и B. Тогда пусть C – следующее за $2k+2$ по часовой стрелке число, D – следующее за $2k+2$ против часовой стрелки число. Пусть $A \ne 2k+1$. Тогда $2k+2 < A$, но $D > 2k$ – это противоречит лемме. Если же $A = 2k+1$, то $B \ne 2k+1$ и получаем аналогичное противоречие ($2k+2 < B$, но $C > 2k-1$). Таким образом, получаем, что либо $A = 2k+1$ и $B = 2k+2$, либо $A = 2k+2$ и $B = 2k+1$. Нетрудно видеть, что лемме не противоречит только второй случай. Это завершает доказательство индукционного перехода.

11 класс

1. См. задачу М1692 «Задачника «Кванта».

2. а) Достаточно провести прямую через середину дуги и середину ломаной BAD.

б) Пусть A – вершина угла, B и D – концы дуги, C – ее середина. Сегменты, опирающиеся на хорды BC и CD, равны. Поэтому достаточно провести через точку C прямую, которая делит пополам площадь четырехугольника $ABCD$.

Проведем через середину диагонали BD прямую l, параллельную AC. Пусть, для определенности, l пересекает отрезок AB (случай пересечения l с отрезком AD рассматривается аналогично). Обозначим $E = l \cap AB$; прямая CE – искомая. Это видно из рассмотрения площадей треугольников ACD, ACE и ACB (с общим основанием AC).

3. См. задачу М1695 «Задачника «Кванта».

4. Нужно доказать следующее утверждение. Пусть каждая сторона квадрата имеет длину 1 и разделена на 2^n равных частей ($n \ge 0$), а через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Тогда кузнечик сможет попасть в любую из 4^n полученных клеток.

При $n = 0$ факт тривиален. Проведем индуктивный переход от n к $n+1$. Рассмотрим какую-то из клеток размера 4^{-n-1}. Выберем самую близкую к ней вершину исходного квадрата и выполним гомотетию с центром в этой вершине и с коэффициентом 2. Тогда выбранная клетка перейдет в одну из клеток размера 4^{-n}. По предположению индукции, кузнечик может в нее попасть. Если он прыгнет теперь на половину расстояния до указанной вершины, то он попадет в нужную клетку.

5. Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем от 1 до k. Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней k цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Аналогично, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, перекрасим в цвет 2, и т.д. вплоть до последнего цвета.

После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета k. Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета $k-1$. Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе ее первоначальный цвет был бы k и она не могла бы соседствовать с вершиной того же цвета. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета $k-2$, и т.д. Продолжая этот процесс, построим путь из вершин k цветов, которые не были перекрашены.

6. Единственное решение уравнения: $n = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$. Докажем это.

Пусть p – простой множитель l. Поскольку $n^m = (1+n^k)^l - 1$, то n^m делится на $(1+n^k)^p - 1$. Но это выражение равно $n^k \cdot p + n^{2k} \cdot p(p-1)/2 + n^{3k} \cdot r$, где r – неотрицательное целое число. Разделив на n^k, получим $p + n^k \cdot p(p-1)/2 + n^{2k} \cdot r$. Если n не делится на p, то это выражение взаимно просто с n, и n^m не может на него делиться. Значит, p – делитель n. Тогда $1 + n^k \cdot (p-1)/2 + (n^{2k}/p) \cdot r$ – натуральное число, большее единицы. Если $k > 1$ или p нечетно, то второе слагаемое делится на n (третье делится всегда), сумма взаимно проста с n, и n^m не может на нее делиться. Следовательно, $k = 1$ и l имеет вид 2^s.

Вспомним теперь, что $n^m = (1+n^k)^l - 1 = (1+n)^l - 1 = ln + \ldots$ В правой части все члены, начиная со второго, делятся на n^2. Из этого, поскольку $m > 1$, следует, что l делится на n. Значит, n, как и l, является степенью двойки. Но

$$(1+n)^l - 1 = \left[(1+n)^{l/2} + 1\right] \cdot \left[(1+n)^{l/2} - 1\right] = \left[(1+n)^{l/2} + 1\right] \ldots (n+2)n,$$

откуда $n+2$ также является степенью двойки. Следовательно, $n = 2$. Множитель разложения, предшествующий $n + 2 = 4$, равнялся бы $3^2 + 1 = 10$ и не был бы степенью двойки. Значит, $l = 2$, откуда $m = 3$.

7. Рассмотрим окружность длины 1 как отрезок [0; 1] с отождествленными концами. Тогда дробную часть f числа $k \cdot \lg 2$ можно рассматривать как точку этой окружности. Первая цифра числа 2^k управляется положением f относительно точек деления 0, $\lg 2$, …, $\lg 9$. (Например, если 2^k начинается с 7, то $7 \cdot 10^s < 2^k < 8 \cdot 10^s$ для натурального s. Дробная часть числа $k \cdot \lg 2$ равна $k \cdot \lg 2 - s$, и она находится между $\lg 7$ и $\lg 8$.)

Предположим, что первые цифры чисел 2^{2^n} повторяются с периодом k. Тогда при любом n дробные части чисел $2^n \cdot \lg 2$ и $2^{n+k} \cdot \lg 2$ попадают в один и тот же интервал окружности; длина любого из этих интервалов не превосходит $\lg 2 < \frac{1}{3}$.

Пусть на окружности отложены дробные части двух положительных чисел A и B; эти дробные части различны и не являются диаметрально удаленными точками окружности; длина меньшей из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, равна x. Тогда, как легко показать непосредственно, длина одной из дуг, соединяющих дробные части чисел $2A$ и