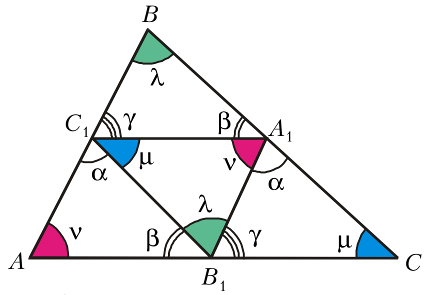

Рис. 2

ляет объединение внутренних углов треугольника AC_1B_1. Аналогично $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$; $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1BA_1$. Привлекая эти факты, а также условие задачи, введем обозначения углов, как показано на рисунке 2.

Из равенства сумм внутренних углов треугольников AC_1B_1 и ABC получаем

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu. \qquad (1)$$

Сравнивая сумму углов треугольника ABC с аналогичными суммами углов треугольников A_1BC_1, A_1B_1C, получаем

$$\beta + \gamma = \mu + \nu, \qquad (2)$$

$$\alpha + \gamma = \lambda + \nu. \qquad (3)$$

Складывая равенства (1), (2), (3) и учитывая, что $\lambda + \mu + \nu = 180°$, отсюда выводим $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Сравнивая последнее равенство с каждым из равенств

$$\alpha + \beta + \nu = 180°, \quad \alpha + \gamma + \mu = 180°, \quad \beta + \gamma + \lambda = 180°,$$

выражающих суммы внутренних углов соответствующих треугольников, получаем $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, $\gamma = \nu$. Следовательно, $A_1B_1 \parallel AB$; $A_1C_1 \parallel AC$; $B_1C_1 \parallel BC$. В параллелограммах $AC_1A_1B_1$, $B_1C_1A_1C$ противоположные стороны равны: $AB_1 = C_1A_1$; $B_1C = C_1A_1$, отсюда $AB_1 = B_1C$, т.е. точка B – середина стороны AC. Аналогично доказывается, что точка A_1 – середина стороны BC, а точка C_1 – середина стороны AB.

Очень важный вопрос

Если t – время от начала движения до первой встречи Винни-Пуха и Пятачка, то, обозначив через a расстояние между их домами и через x путь, пройденный Винни-Пухом, получим, что Винни-Пух шел со скоростью x/t, а Пятачок – со скоростью $(a-x)/t$. Оставшийся путь $(a-x)$ Винни-Пух прошел за 1 минуту, т.е. его скорость равнялась $(a-x)/1$, а Пятачок прошел оставшийся путь длиной x за 4 минуты и его скорость составила $x/4$. Но так как их скорости не изменились, то $\frac{x}{t} = \frac{a-x}{1}$ и $\frac{a-x}{t} = \frac{x}{4}$, или $\frac{x}{a-x} = \frac{t}{1}$ и $\frac{x}{a-x} = \frac{4}{t}$. Так как левые части этих уравнений равны, то равны и правые: $\frac{t}{1} = \frac{4}{t}$. Отсюда $t^2 = 4$, $t = 2$. Итак, до встречи Винни-Пух и Пятачок шли 2 минуты; значит, всего Винни-Пух шел 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

Несколько задач для 11-классников

Вариант 1

1. а) $a = 8$, $x = \sqrt{5} - 2$. б) $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty)$. в) $a < 0$; $a = \frac{27}{4}$. *Указание.* Постройте график функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x}$ при $x > -1$. г) Наименьшее значение функции $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{x}$ на луче $(0; +\infty)$ равно $n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > ne$.

2. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $[0; 2] \cup [2n-1; 2n]$, где $n \geq 2$ или $n \leq -1$ (случаи $a = 0$; ± 1 надо рассмотреть отдельно). в) $\frac{\pi}{4}$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $f(x) \leq \sin x < \cos x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. г) $\left[1; \frac{5}{3}\right]$. Поскольку множитель $\sin ax$ не должен обращаться в нуль на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $|a| < 4$. Теперь оценки $1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ следуют из того, что исходное неравенство должно быть верным при $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Осталось показать, что для любого $a \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$ неравенство $\sin ax \sin x \geq \frac{1}{2}$ верно для всех $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, что требует дополнительного рассуждения, в котором полезно использовать то, что функция $y = 2\left(2z^2 - 1\right)^2$ – выпуклая.

3А. а) Два корня. *Указание.* Покажите, что функция $f(x) = ax^{1998} - cx^{1917} + b - d$ имеет не более одной точки экстремума. б) $x = 1$. в) $a \in \boldsymbol{Z}$, $d = 0$. *Указание.* Пусть $an^{1998} = s(n)\left(n^{1917} + d\right)$, где $s(n)$ – целое. Ясно, что $s(n) \leq Mn^{81}$. Перейдем теперь к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $an^{81} - s(n) = ds(n)n^{-1917}$. Число, стоящее в его левой части – целое, между тем его правая часть стремится к нулю. Значит, $d = 0$. г) $(a, b, c) = (71k, 3k, 74k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (см. задачу 8 в статье).

3Б. См. задачу 7 в статье.

3В. а) -1, $-i$, $1 + i$. б) $b = 0$, a – любое. *Указание.* Проще всего воспользоваться формулами Виета. в) $a = 0$, $b \neq 0$. *Указание.* Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то из условия, что эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольника, следует, что они являются корнями уравнения $z^3 = b_1$. Следовательно, они суть и корни уравнения $az + b + b_1 = 0$, которое тем самым имеет по крайней три различных корня. г) *Указание.* Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда

$$\left|p(z)\right|^2 = 1 + |a|^2 + |b|^2 + \left(a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi\right) +$$

$$+ \left(b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi\right) + \left(a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \left(a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi\right) + \left(b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi\right).$$

Осталось показать, что если $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, то найдется такое решение системы неравенств

$$\begin{cases} a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi \geq 0, \\ b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi \geq 0, \end{cases}$$

на котором одно из неравенств системы является строгим.

Вариант 2

1. б) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ (см. решение задачи 2 в статье). в) *Указание.* Так как $D_1 + D_2 = p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geq 2p_1p_2 - 4(q_1 + q_2) = 0$, то хотя бы один из дискриминантов неотрицателен.

2. а) См. рис. 3. Функция $y = \log_2 x + 2x$ – возрастающая и ее нуль – $x = \frac{1}{2}$.

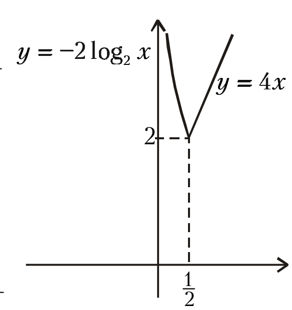

Рис. 3

б) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

в) См. задачу 5 в статье. г) Да, достаточно (см. задачу 3 в статье).