Задачи с проводящими сферами

А.ЧЕРНОУЦАН

Задачи на электростатику, в которых присутствуют одна или несколько проводящих сфер, традиционно оказываются трудными для многих абитуриентов. В особенности это относится к задачам на «перезарядку», где требуется выяснить, какие изменения произошли в системе при соединении отдельных проводников между собой. Большие трудности вызывают задачи на энергию системы проводников. Непреодолимым препятствием может оказаться и присутствие в задаче внешних зарядов (например, точечных), нарушающих сферическую симметрию системы.

Многие такие задачи решаются обычными школьными методами, в первую очередь – методом суперпозиции. Однако для успешного применения этих методов в задачах с проводящими сферами нужно хорошо понимать основные свойства проводников. А именно:

1) Проводник — это тело, в котором есть свободные заряды, способные перемещаться по объему проводника. В металлах, в частности, роль свободных зарядов играют электроны проводимости.

2) В электростатике рассматривается состояние равновесия системы, т.е. состояние, в котором отсутствует направленное движение зарядов (отсутствуют токи). Это означает, что напряженность электростатического поля в любой точке проводника должна быть равна нулю; в противном случае в окрестности этой точки немедленно начнется направленное движение свободных зарядов.

3) Все точки проводника имеют один и тот же потенциал, который называют потенциалом данного проводника. Поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность. Силовые линии поля вне проводника перпендикулярны к его поверхности.

4) Объемная плотность заряда внутри проводника равна нулю. Все нескомпенсированные заряды проводника находятся на его поверхности.

5) Если заданы заряды или потенциалы всех проводников системы, то можно найти только одно распределение зарядов на проводниках (и единственное распределение поля в пространстве между проводниками), соответствующее этим данным. Эта так называемая теорема единственности играет важную роль в электростатике.

6) Энергия уединенного проводника (энергия поля вокруг проводника) равна

$$W = \frac{1}{2} q\varphi,$$

где q – заряд и φ — потенциал проводника. Энергия системы проводников равна

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i .$$

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Начнем с задачи о поле уединенной заряженной сферы.

Задача 1. *На уединенную проводящую сферу радиусом R нанесен заряд q. Найдите напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Вычислите потенциал сферы и ее энергию.*

Из соображений симметрии очевидно, что заряд по поверхности сферы распределен равномерно. Напряженность поля внутри сферы равна нулю, а вне сферы напряженность такая же, как у поля точечного заряда q, помещенного в центр сферы:

$$E = 0 \text{ при } r < R ,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ при } r > R .$$

Что касается потенциала, то его удобнее найти сначала во внешней области. Так как напряженность поля сферы совпадает с напряженностью поля точечного заряда, потенциалы этих полей могут различаться только константой, но, поскольку оба потенциала равны нулю на бесконечности, эта константа равна нулю. Следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \text{ при } r \ge R . \quad (1)$$

Из условия непрерывности потенциала делаем вывод, что потенциал внутри сферы (потенциал сферы) равен

$$\varphi_{\text{сф}} = \varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \text{ при } r \le R . \quad (2)$$

Полученные результаты для напряженности и потенциала изображены графически на рисунке 1. Отметим, что вычисление потенциала можно начинать не с внешней, а с внутренней области. Дело в том, что центр сферы

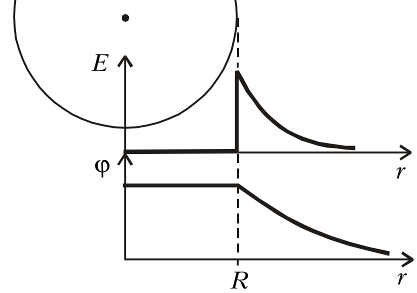

Рис. 1

находится на одном и том же расстоянии R от всех поверхностных зарядов, создающих поле, что позволяет легко вычислить потенциал в этой точке:

$$\varphi_{\text{ц}} = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} . \quad (3)$$

В данном случае такой подход выглядит менее естественным, но иногда он оказывается удобным.

Осталось вычислить энергию сферы:

$$W = \frac{1}{2} q\varphi_{\text{сф}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} .$$

Уместно лишний раз напомнить, что энергия сферы есть не что иное, как энергия электрического поля в пространстве вокруг сферы.

Задача 2. *Проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 находятся на большом*