журнала «Квант» и устроителей олимпиад, да и весь опыт наших математических школ и кружков созвучны идеям Грэхема, Кнута и Паташника. Если бы языковой барьер не затруднял американцам знакомство с русскоязычными источниками, то «Конкретная математика» включала бы, я уверен, многие из наших олимпиадных задач.[1] Правда, у нас олимпиады проводились в основном для школьников, а не для студентов. Поэтому очень интересно познакомиться с американским опытом, к тому же увлекательно изложенным.

Авторы сообщают, что «с удовольствием объединили свои усилия для работы над этой книгой, поскольку ее предмет начал зарождаться и обретать свою собственную жизнь на наших глазах; кажется, что книга написана сама собой. Более того, отчасти разнородные подходы, которые выбирал каждый из нас, оказались после многолетней совместной работы настолько подогнанными друг к другу, что мы не могли удержаться от ощущения: эта книга – своего рода манифест единодушно избранного нами пути занятий математикой».

Основные темы книги – индукция и исчисление сумм, рекуррентность, целочисленные функции и последовательности, элементы арифметики, биномиальные коэффициенты, производящие функции, вероятности и асимптотики. Обучение общим темам ведется на многочисленных примерах: в книге более 500 упражнений, причем все они снабжены указаниями, а большинство – подробными решениями.[2] Неформальный стиль изложения, многочисленные пометки и комментарии на полях, в том числе шутки студентов, позволяют осваивать весьма серьезные темы весело и непринужденно.

Начинается книга с индукции – важнейшего метода математического исследования. Подробнейшим образом обсуждена задача о ханойской башне[3], которую придумал француз Эдуард Люка в 1883 году. (Башня представляет собой несколько колец, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и никогда не помещая больший диск на меньший.) Затем рассмотрена придуманная швейцарцем Якобом Штейнером в 1826 году задача о разрезании пиццы (т.е. о том, на какое наибольшее число областей могут разделить плоскость n прямых). После этого – задача Иосифа Флавия, от решения которой две тысячи лет назад в буквальном смысле зависела жизнь человека. («Есть легенда, что Иосиф выжил и стал известным благодаря математической одаренности. В ходе Иудейской войны он в составе отряда из 41 воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего... Однако Иосиф вместе со своим единомышленником... вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища.»)

Далее идет «Исчисление сумм». Семью способами найдена сумма квадратов $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.[4] После этого по индукции доказаны равенства

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Вряд ли многие задумывались об аналогии между ними. И даже если вы задумывались и знаете, что если в последнем равенстве каждое слагаемое $1/(k(k+1))$ представить в виде разности дробей $1/k$ и $1/(k+1)$, то получится как раз

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

а тождество

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) =$$
$$= 3k(k+1)$$

позволяет аналогично найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}(1\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 1\cdot 2 +$$
$$+ 2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n +$$
$$+ n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)) =$$
$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

все равно вопрос о величине

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$

не кажется простым. Между тем все это есть часть единого целого – теории конечных разностей.

Дальнейшей пересказ книги не имеет смысла: каждому интересующемуся наукой старшекласснику (тем более – студенту или преподавателю) я советую ее прочитать. Авторы гарантируют: «...все, что Вам потребуется, – это ясная голова, большой лист бумаги и сносный почерк для вычисления ужасных сумм, решения запутанных рекуррентных соотношений и выявления коварных закономерностей в данных. Вы овладеете алгебраической техникой в такой степени, что зачастую будет проще получить точные результаты, нежели удовлетвориться приближенными ответами, справедливыми лишь в пределе».

Б.Спиров

---

[1] *Впрочем, авторы с уважением относятся к нашей стране. Д.Кнут даже владеет русским языком, а когда он разрабатывал* TEX, *то сделал так, чтобы эту издательскую систему можно было легко адаптировать к любому неиероглифическому языку, в том числе к русскому.*

[2] *Удивительная добросовестность авторов проявилась и в огромном списке литературы (на каждый из 401 источников есть ссылка в тексте!), и в исторических изысканиях: для каждого упражнения они пытались найти первоисточник!*

[3] *Между прочим, о ханойской башне можно прочитать в одной из первых и лучших наших «олимпиадных» книг: Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов и И.М.Яглом «Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра» (М., 1965). Там она хотя и не первая по номеру, но третья!*

[4] *Не верите, что такое возможно? Читайте книгу! Там указан еще и нулевой способ – посмотреть ответ в справочнике, причем объяснено, в каких именно справочниках и как следует искать интересующие сведения.*