Упражнение 2. При помощи калькулятора убедитесь, что следующая таблица заполнена правильно:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\left[\left(1+\sqrt{5}\right)n/2\right]$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29
$\left[\left(3+\sqrt{5}\right)n/2\right]$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47

Доказательство

Как же доказать замечательные формулы (1)? И неужели я первый догадался рассмотреть выражения $[\alpha\beta]$ и $[\beta n]$? Нет, в 1877 году в «Теории звука» лорд Рэлей писал: «Если x есть некоторое положительное иррациональное число, меньшее единицы, то можно взять два ряда величин n/x и $n/(1-x)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$; каждое число, принадлежащее к тому или иному ряду, и только оно одно, будет заключено между двумя последовательными натуральными числами». Другими словами, последовательности $a_n = [n/x]$ и $b_n = [n/(1-x)]$ заполняют без пропусков и перекрытий весь натуральный ряд, если $0 < x < 1$ и $x \notin \boldsymbol{Q}$.

Интересующие нас явные формулы получаются из формул Рэлея при $x = 2\big/\left(1+\sqrt{5}\right)$, поскольку при этом величина $1 - x$ равна как раз $2\big/\left(3+\sqrt{5}\right)$ (проверьте!).

В общем случае, обозначив $\alpha = 1/x$ и $\beta = 1/(1-x)$, можно переформулировать утверждение Рэлея следующим образом [1]:

Теорема 1. *Если α и β – положительные иррациональные числа, связанные соотношением $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то среди чисел вида $[\alpha n]$ и $[\beta n]$, где $n \in \boldsymbol{N}$, каждое натуральное число встречается ровно один раз.*

Доказательство. Поскольку $\alpha > 1$, в последовательности $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots$ никакое число не повторяется. Аналогично, вследствие неравенства $\beta > 1$, строго возрастает и последовательность $[\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$

Дальше доказательство ведем методом «от противного». Предположим сначала, что некоторое натуральное число k вошло в обе последовательности, т. е. $k = [\alpha m] = [\beta n]$, где m, n – натуральные числа. Тогда должны быть выполнены неравенства

$$k < \alpha m < k+1, \qquad k < \beta n < k+1,$$

т.е.

$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k}, \qquad \frac{n}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{k}.$$

Сложим эти неравенства, не забыв использовать условие $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Получим

$$\frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k},$$

откуда

$$k < m+n < k+1.$$

Но такого для натуральных чисел не бывает! Значит, число k не могло войти в обе рассматриваемые последовательности.

Теперь предположим, что натуральное число k не вошло ни в одну из последовательностей. Тогда для некоторых натуральных чисел m и n должны быть выполнены неравенства

$$\alpha m < k < k+1 < \alpha(m+1),$$

$$\beta n < k < k+1 < \beta(n+1),$$

которые мы преобразуем к виду

$$\frac{m}{k} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{k+1}, \quad \frac{n}{k} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{k+1}.$$

Складывая, получаем

$$\frac{m+n}{k} < 1 < \frac{m+n+2}{k+1},$$

откуда $m + n < k$ и $k + 1 < m + n + 2$, что невозможно для натуральных чисел. Получили желанное противоречие. Теорема доказана.

Хотя мне нравится это доказательство, есть и более короткий способ.[2] Левее любого натурального числа N лежат $[N/\alpha]$ членов первой последовательности и $[N/\beta]$ членов второй. Поскольку α иррационально, числа N/α и N/β имеют ненулевые дробные части. Далее, сумма

$$\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N$$

является целым числом, так что дробные части слагаемых дополняют друг друга, т.е. в сумме дают в точности 1. Значит, сумма целых частей $[N/\alpha] + [N/\beta]$ равна $N - 1$, т.е. левее числа N лежит в точности $N - 1$ членов этих последовательностей. Как легко понять, просматривая натуральный ряд слева направо (любитель строгости сказал бы: применяя индукцию), это как раз означает, что рассматриваемые последовательности однократно покрывают натуральный ряд.

Упражнения

3. Докажите, что последовательности, заданные формулами $a_n = \left[n\sqrt{2}\right]$ и $b_n = a_n + 2n$, заполняют весь натуральный ряд без пропусков и перекрытий.

4. Найдите явные формулы для возрастающих последовательностей a_n и b_n, заполняющих натуральный ряд без пропусков и перекрытий и удовлетворяющих соотношению $b_n = a_n + 3n$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. Докажите утверждение, обратное теореме 1: если α, β – положительные числа и если последовательности $a_n = [\alpha n]$ и $b_n = [\beta n]$ покрывают натуральный ряд без пропусков и перекрытий, то $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, причем числа α и β иррациональны.

6. Выведите из трех предыдущих упражнений, что числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{13}$ иррациональны.[3]

7. Пусть a – положительное иррациональное число, $b = 1/a$. Докажите, что между любыми двумя последовательными натуральными числами содержится одно и только одно из чисел $1 + a$, $2(1 + a)$, $3(1 + a)$, … и $(1 + b)$, $2(1 + b)$, $3(1 + b)$, …

Замечание. Последнее упражнение имеет номер 38 в книге «Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly» (М., Мир, 1977). Следующее упражнение – задача 294 из той же книги.

8. Для натурального числа $a > 4$ рассмотрим две последовательности $f(n)$ и $g(n)$ натуральных чисел, заданные условиями $f(1) =$

[1] *С этого момента, заметьте, числа α и β не обязательно суть $\left(1+\sqrt{5}\right)\big/2$ и $\left(3+\sqrt{5}\right)\big/2$.*

[2] *Мне кажется, его чуть сложнее понять или придумать. Впрочем, не будем спорить о вкусах.*

[3] *Только не подумайте, пожалуйста, что я хочу заменить этим способом привычное доказательство из школьного учебника. Нет, это всего лишь шутка. Шутка!*