Биссектрисы, вписанная и вневписанные окружности треугольника

Как известно, биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – в центре вписанной окружности. Но мало кто знает, что радиус r вписанной окружности связан с высотами треугольника соотношением

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Биссектриса угла A треугольника делит противоположную сторону на отрезки $\frac{ab}{b+c}$ и $\frac{ac}{b+c}$, которые относятся как прилежащие к ним стороны треугольника b и c. Сама же биссектриса делится точкой O пересечения биссектрис в отношении $(b+c):a$.

Длина биссектрисы, проведенной из вершины A, равна

$$\frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c},$$

а расстояние от точки A до центра вписанной окружности равно

$$\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}},$$

где p – полупериметр треугольника.

Нетрудно с помощью циркуля и линейки построить треугольник по его сторонам. Чуть труднее сделать это по медианам или по высотам. А построить треугольник по биссектрисам (в общем случае) невозможно.

Если провести все три биссектрисы внешних углов треугольника, то образуются три точки их пересечения, каждая из которых одинаково отстоит от прямых, на которых лежат стороны данного треугольника. Поэтому можно провести окружность с центром в такой точке, касающуюся всех сторон треугольника или их продолжений. Такие окружности называются вневписанными.

Через центр вневписанной окружности проходит и биссектриса одного из внутренних углов треугольника.

Сумма величин, обратных радиусам ρ_a, ρ_b и ρ_c вневписанных окружностей (рис.1), равна обратной величине радиуса вписанной в этот треугольник окружности:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}.$$

Приведем два изящных выражения для площади треугольника через радиусы вписанной и вневписанных окружностей:

$$S=\sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c},\quad S=\frac{a\rho_b\rho_c}{\rho_b+\rho_c}.$$

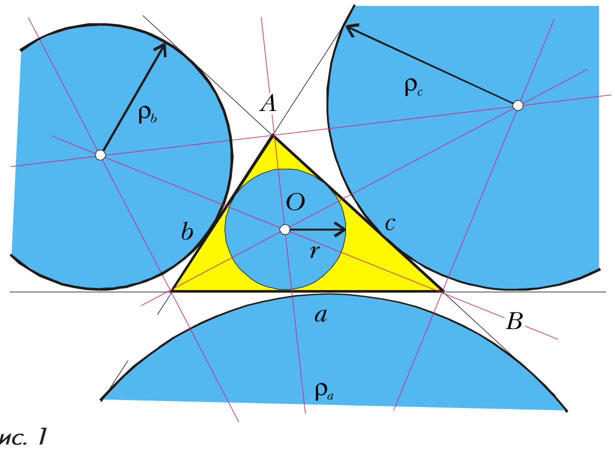

Рис. 1

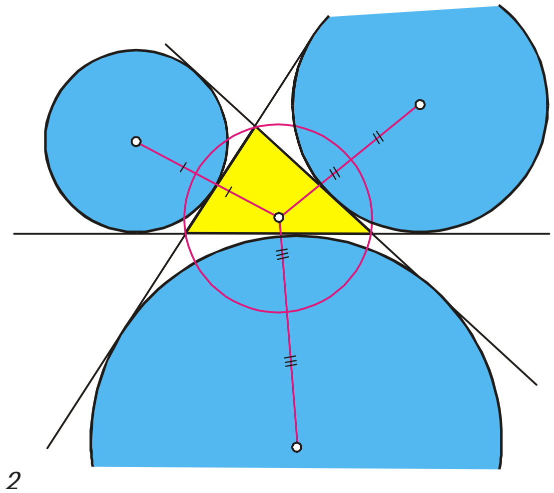
Рис. 2