Решение. Ясно, что если 1 является корнем многочлена $p(x)$ кратности не меньшей двух, т.е. $p(x)=(x-1)^2 d(x)$, то коэффициенты многочлена d суть целые числа, а потому при всех $n \in \boldsymbol{N}$ число $\frac{p(n)}{(n-2)^2}$ – целое. Далее, для того чтобы кратность корня a многочлена p была не меньше двух, необходимо и достаточно, чтобы $p(a)=0$ и $p'(a)=0$. Поэтому в условиях задачи мы получаем, что числа a, b, c должны быть решениями системы

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 1998a+1917b=0. \end{cases}$$

Поскольку $1998 = 27\cdot 74$, $1917 = 27\cdot 71$, то отсюда следует, что $a = 71k$, $b = -74k$, где число k – целое, а $c = 3k$.

Ответ — $(a,b,c) = (71k, -74k, 3k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$, – верен, однако полного решения пока нами не получено. Действительно, то, что 1 – корень многочлена p кратности по крайней мере два, это *достаточное* условие делимости $p(n)$ на $(n-1)^2$! Для того чтобы показать, что задача других решений не имеет, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $p(x)$, $q(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами. Если при всех натуральных n число $p(n)$ делится на $q(n)$ (или же при некоторых значениях n оба этих числа одновременно обращаются в нуль), то многочлен $p(x)$ делится на многочлен $q(x)$.*

Самое интересное в доказательстве данного утверждения состоит в том, что оно во многом основано на аналитическом, а не на алгебраическом рассуждении.

Вначале разделим $p(x)$ на $q(x)$ с остатком:

$$p(x)=d(x)q(x)+r(x), \qquad (2)$$

где степень многочлена r меньше степени многочлена q.

Предположим, что $r(x)\neq 0$. Будем далее рассматривать настолько большие числа, что $q(n)\neq 0$, $r(n)\neq 0$. Положим $k_n=\frac{p(n)}{q(n)}\in \boldsymbol{Z}$. Из равенства (2) следует, что

$$k_n-d(n)=\frac{r(n)}{q(n)}.$$

Заметим теперь, что левая часть этого равенства есть целое число, что противоречит тому, что его правая часть отлична от нуля, но стремится к нему при $n\to\infty$.

В заключение приведем для самостоятельного решения наборы задач, предлагавшихся выпускникам школ Санкт-Петербурга в 1998 году.

Вариант 1
(профильно-элитарный экзамен)

1. Дана функция $f(x)=\log_{x+1} ax$.

а) Известно, что $x = 1$ – корень уравнения $f(x) = 3$. Найдите a и остальные корни этого уравнения.

б) Пусть $a=\frac{9}{2}$. Решите неравенство $f(x)\geq f\left(\frac{1}{x}\right)$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение.

г) Докажите, что если уравнение $f(x) = n + 1$ (n – натуральное) имеет положительный корень, то $a > ne$.

2. Дана функция $f(x)=\sin ax \sin x$.

а) Пусть $a = 3$. Решите уравнение $\frac{f(2x)}{f(x)}=-2$.

б) Найдите все a, при которых $\int_0^{\pi} f(x)dx \geq 0$.

в) Пусть x_a – наименьший положительный корень уравнения $f(x)=\cos x$. Найдите наименьшее значение x_a.

г) Найдите все a, при которых $f(x)\geq \frac{1}{2}$ при всех $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

Дополнительная задача
(выбирается один из трех сюжетов)

3А. Даны многочлены $p(x) = ax^{1998} + b$ и $q(x) = cx^{1917} + d$, $a\neq 0$.

а) Найдите наибольшее возможное число действительных корней уравнения $p(x) = q(x)$.

б) Пусть $a = 71$, $b = 3$, $c = 74$ и $d = 0$. Решите уравнение $p(x) = q(x)$.

в) Пусть $b = 0$, $c = 1$. Найдите все целые a, d, при которых число $p(n)$ делится на $q(n)$ при всех $n\in \boldsymbol{N}$.

г) Пусть $d = 0$. Найдите все целые a, b, c, при которых разность $p(n) - q(n)$ делится на $(n-1)^2$ при всех $n\in\boldsymbol{N}$.

3Б. Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Двое по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй из них может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

3В. Дан многочлен $p(z) = z^3 + az + b$, $a, b, z\in\boldsymbol{C}$.

а) Пусть $a = -i$, $b = 1 - i$. Найдите корни многочлена $p(z)$ (и запишите их в алгебраической форме).

б) Найдите все пары (a, b), при которых один из корней многочлена $p(z)$ совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и в следующем пункте мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

в) Найдите все пары (a, b), при которых корни многочлена $p(z)$ лежат в вершинах равностороннего треугольника.

г) Докажите, что если $|p(z)|\leq 1$ при всех $|z| = 1$, то $a = b = 0$.

Вариант 2
(олимпиада выпускников)

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник – параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

в) Докажите, что если $p_1p_2 = 2(q_1+q_2)$, то по крайней мере один из квадратных трехчленов $x^2 + p_i x + q_i$, $i = 1, 2$, имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = 2x + \left|\log_2 x + 2x\right| - \log_2 x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{2-\cos 2x} = \sin x - \cos x$.

в) Решите неравенство $\sqrt{|1-2x|}\geq 1+ax$.

г) Для того чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 2000$. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по 20000$ в год из процентов, не трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых; считайте, что $\lg 1{,}1 = 0{,}0414$.

3. а) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что $\angle CAD+\angle EAD+\angle FAD=90^\circ$.

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты x,

(*Окончание см. на с. 35*)