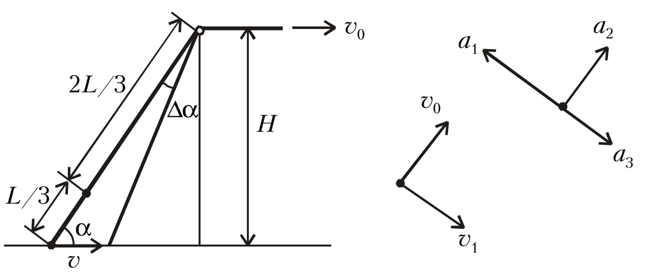
б) Расположим внутри данного тетраэдра четыре тетраэдра, полученных из него гомотетиями с центрами в его вершинах и коэффициентами $2/3$. Пересечение трех таких тетраэдров пусто, а любые два пересекаются по тетраэдру, гомотетичному данному с коэффициентом $1/3$ (центрами гомотетий будут середины ребер тетраэдра). Общий объем четырех тетраэдров равен $(4 \cdot 8 - 6)/27 = 26/27$ объема исходного тетраэдра, а не занятая ими часть будет тетраэдром с вершинами в центрах его граней. Для завершения доказательства осталось разрезать каждый из четырех тетраэдров в соответствии с п. а).

А.Заславский

Ф1683. *Мотор на берегу равномерно наматывает на вал веревку, с помощью которой подтягивается к берегу лодка. В данный момент веревка составляет угол α с горизонтом, а скорость лодки равна v. На веревке завязан небольшой узелок – в указанный момент он вдвое ближе к носу лодки, чем к валу, на который наматывается веревка. Найдите скорость и ускорение узелка в данный момент времени.*

Скорость лодки направлена вдоль поверхности воды (см. рисунок), проекция этой скорости на направление



веревки (нити) равна постоянной по величине скорости наматывания нити на барабан v_0:

$$v_0 = v\cos\alpha .$$

За малый интервал времени Δt нить повернется на малый угол

$$\Delta\alpha = \frac{v\Delta t\sin\alpha}{L}.$$

Угловая скорость «вращения» нити равна

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{v\sin\alpha}{L}.$$

Скорость узелка можно представить в виде векторной суммы поступательной скорости (вдоль нити), равной v_0, и линейной скорости вращательного движения, равной (с учетом расположения узелка в интересующий нас момент)

$$v_1 = \frac{2}{3}L\omega = \frac{2}{3}v\sin\alpha .$$

Полная скорость узелка в заданный момент будет равна

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v^2\cos^2\alpha + \frac{4}{9}v^2\sin^2\alpha} = \frac{v}{3}\sqrt{9\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} .$$

Для нахождения ускорения нам придется задать дополнительную величину, не указанную в условии (из заданных скорости и угла никак не удастся «составить» ускорение – размерность не позволит). Пусть нам известна высота блока H над поверхностью воды – размеры блока будем считать малыми. Ускорение узелка можно представить в виде векторной суммы трех ускорений: первое связано с поворотом вектора $\vec{v}_0$, второе – с поворотом вектора $\vec{v}_1$ и третье – с увеличением модуля скорости $\vec{v}_1$. Первое ускорение – оно перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}_0$ – равно

$$a_1 = v_0\omega = v_0\frac{v\sin\alpha}{L} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{H\cos\alpha}.$$

Второе ускорение перпендикулярно линейной скорости вращательного движения, т.е. направлено вдоль нити, и равно

$$a_2 = v_1\omega = \frac{2}{3}v\sin\alpha \cdot \frac{v\sin\alpha}{L} = \frac{2}{3}\frac{v_0^2\sin^3\alpha}{H\cos^2\alpha}.$$

Третье ускорение направлено вдоль скорости $\vec{v}_1$, т.е. перпендикулярно нити, и равно

$$a_3 = \frac{2}{3}\frac{v_0\operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - v_0\operatorname{tg}\alpha}{\Delta t} = \frac{2}{3}\frac{v_0\sin\Delta\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\Delta t} = \frac{2}{3}\frac{v_0\omega}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{3}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{H\cos^3\alpha}.$$

Сложим, с учетом знаков, все ускорения и найдем модуль полного ускорения узелка:

$$a = \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + a_2^2} = \frac{2}{3}\frac{v^2\sin^2\alpha}{H}\sqrt{\frac{(1{,}5\cos^2\alpha - 1)^2}{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha} .$$

С.Варламов

Ф1684. *Для снабжения небольшого дома горячей водой применено не самое удачное устройство. Оно состоит из очень большого бака с теплоизоляцией, от которого потребители получают маленькими порциями горячую воду, и автоматического устройства, которое сразу же пополняет бак крутым кипятком. Оказалось, что при стандартном количестве потребляемой воды температура воды в баке составляет +60 °С при температуре окружающего воздуха +20 °С. Какая температура установится в баке при увеличении расхода воды вдвое? Теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур.*

Пусть за минуту жители потребляют массу воды m, тогда за это время в бак поступит такая же масса кипятка при температуре $t_1 = +100$ °С. Остывая до температуры воды в баке $t_2 = +60$ °С, кипяток отдаст количество теплоты $cm(t_1 - t_2)$, а бак отдаст столько же тепла в окружающую среду с температурой $t_3 = +20$ °С:

$$cm(t_1 - t_2) = K(t_2 - t_3),$$

где K – постоянный коэффициент.

Если теперь за минуту потребляется $2m$ воды, то для новой температуры воды в баке t будет выполняться условие

$$2cm(t_1 - t) = K(t - t_3).$$