площадку:

$$N = \int_0^\infty dn(y).$$

Это соотношение можно переписать и так:

$$\langle mgy \rangle = mg \frac{\int_0^\infty y\,dn(y)}{\int_0^\infty dn(y)}.$$

Знаменатель этого выражения равен $n(\infty) - n(0) = 0 - n_0 = -n_0$ (учтено, что $n(\infty) = 0$, т.е. на бесконечности концентрация равна нулю). Числитель легко найти, воспользовавшись тождеством

$$d(yn) = y\,dn + n\,dy ,$$

откуда

$$\int_0^\infty y\,dn(y) = \int_0^\infty d(yn) - \int_0^\infty n\,dy =$$

$$= yn\Big|_{y=0}^{\infty} - n_0 \int_0^\infty e^{-\frac{mgy}{k_Б T}} d\left(y\frac{mg}{k_Б T}\right)\left(\frac{k_Б T}{mg}\right) =$$

$$= 0 - n_0 \frac{k_Б T}{mg}.$$

В результате

$$\langle mgy \rangle = k_Б T .$$

Формулы (6) и (7) показывают, что средние значения как кинетической, так и потенциальной энергий молекул газа порядка $k_Б T$. Этот результат оказывается верным и в любом другом случае, когда имеет место термодинамическое равновесие большого количества участников хаотического движения.

А что же равновесное излучение в печке? Согласно условию (1), наибольшая длина волны равна $\lambda = 2l$, так что для характерного размера печки $l \sim 1$ м получим $\lambda_{max} \sim 2$ м. Это длина радиоволнового диапазона. Наименьшая длина волны может быть любая, в том числе и из рентгеновского диапазона. Но, конечно, никто не рассматривает печку в качестве радиостанции или рентгеновского аппарата. Из широкого набора частот какое-то значение ν_* при данной температуре будет наиболее характерным (чаще всего встречающимся среди фотонов, наиболее вероятным, средним – или придумайте еще какое-либо слово). Сказанное выше позволяет ожидать, что соответствующая энергия фотонов равновесного излучения тоже будет порядка $k_Б T$, т.е.

$$h\nu_* \sim k_Б T , \qquad (8)$$

а распределение энергии излучения по частотам будет иметь вид колоколообразной кривой (рис.6). Эта кривая показывает, что в области очень

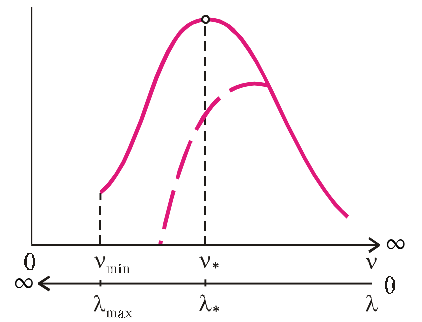

Рис.6

больших и очень малых частот заключено мало энергии, а больше всего – в окрестности характерной частоты $\nu_* \sim k_Б T/h$. Таким образом, полную энергию равновесного излучения в объеме печки можно оценить выражением

$$U \sim N(\nu_*) \cdot h\nu_* \sim \frac{l^3}{c^3} h\nu_*^4 ,$$

а плотность энергии (энергию единицы объема) – выражением

$$u = \frac{U}{l^3} \sim \frac{1}{c^3 h^3} \left(k_Б T\right)^4 . \qquad (9)$$

Собственно, ради этой зависимости

$$u = \alpha T^4$$

мы и трудились так долго, чтобы не заявлять просто: дескать, существует такой закон имени Стефана и Больцмана – и все тут. (Сразу же отметим, что полученные выражения отражают только размерность искомых величин. Правильное распределение фотонов по частотам описывается так называемой формулой Планка, содержащей безразмерный множитель $1\Big/\left(e^{h\nu/k_Б T} - 1\right)$, – см., например, самый первый номер журнала «Квант». Но для наших целей и этого достаточно, поскольку упомянутая правильная квантово-механическая формула не изменит размерности величины u.)

Можно сделать и еще одно очень полезное наблюдение – оценить энергию, излучаемую в единицу времени с единицы поверхности нагретого тела. Поскольку мы говорим здесь о равновесном излучении, то, как уже отмечалось выше, сколько энергии излучается, столько же и падает. Но если плотность энергии равна u, то, умножив ее на скорость распространения (а это скорость света c), мы получим *плотность потока энергии* uc (с размерностью $\left(Дж/м^3\right)(м/с) = Дж\big/\left(м^2 \cdot с\right)$); а коль скоро фотоны летают во всех направлениях с равной вероятностью, грамотный школьник сразу скажет, что в направлении *к поверхности* тела должна двигаться $1/6$ часть всех фотонов (так как это одно из шести направлений: вперед – назад, вверх – вниз, вправо – влево). Значит, плотность потока энергии *от поверхности* будет равна

$$q = \frac{1}{6} uc \sim \frac{k_Б^4}{c^2 h^3} T^4 . \qquad (10)$$

Это тоже закон Стефана – Больцмана.

Еще более грамотный студент скажет, что нужно написать не $1/6$, а $1/4$, и будет совершенно прав; но эти тонкости сейчас не существенны. Главное, что мы получили не только закон Стефана – Больцмана $u = \alpha T^4 \sim q = \sigma T^4$, где σ – постоянная Стефана – Больцмана, но и нетривиальную связь коэффициентов пропорциональности в этом законе с фундаментальными физическими константами:

$$\alpha \sim \frac{k_Б^4}{c^3 h^3} , \quad \sigma \sim \frac{k_Б^4}{c^2 h^3} .$$

Точное значение σ: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ Дж\big/\left(м^2 \cdot с \cdot К^4\right)$. Заметим, что эти комбинации фундаментальных констант можно получить (как это не раз и делалось в популярной литературе) на основе соображений размерностей, если известен набор относящихся к делу величин: h, $k_Б$, c. Мы же здесь постарались этот набор обосновать.

Видно, что зависимость q от T очень крутая: при увеличении температуры, скажем, в 2 раза, плотность потока излучения возрастает в 16 раз!

Получив в распоряжение этот закон, было бы обидно не использовать его тут же. Например, можно, оказывается, оценить температуру поверхности Солнца $T_С$, зная только, под каким углом $\theta_С = D_С/L$ виден его диаметр $D_С$, и среднюю температуру Земли $T_З$ (здесь L – расстояние между Солнцем и Землей). Действительно, со всей поверхности Солнца излучается в единицу времени энергия

$$Q_С = q_С \cdot 4\pi R_С^2 = \sigma T_С^4 \pi D_С^2 .$$