Два этюда о расстояниях

Е.ШИКИН

В основу определения расстояния положены три свойства — положительная определенность, симметричность и неравенство треугольника, которые с житейской точки зрения выглядят совершенно естественными. В самом деле, разве возникают сомнения в том, что расстояние между двумя различными пунктами должно характеризоваться положительным числом, не зависящим от того, из какого из этих пунктов ведется отсчет и как часто, срезая углы, мы пользуемся тропинками («народными тропами»), протоптанными ранее другими нетерпеливыми пешеходами (рис.1)?

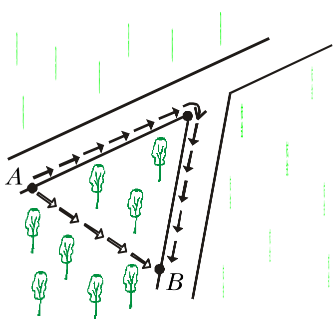

Рис. 1

Само понятие расстояния вводится в два этапа.

Сначала формулируется правило.

Говорят, что на множестве χ введено расстояние, если указан закон, согласно которому любым двум элементам A и B этого множества ставится в соответствие число (будем обозначать его $\mathrm{dist}(A, B)$), и выполнены следующие условия:

1) *положительная определенность:*

$$\mathrm{dist}(A, B) \geq 0,$$

причем равенство $\mathrm{dist}(A, B) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда элементы A и B совпадают;

2) *симметричность*:

$$\mathrm{dist}(A, B) = \mathrm{dist}(B, A)$$

для любых элементов A и B;

3) *неравенство треугольника*:

$$\mathrm{dist}(A, C) \leq \mathrm{dist}(A, B) + \mathrm{dist}(B, C)$$

для любых элементов A, B и C рассматриваемого множества.

Число $\mathrm{dist}(A, B)$ называется *расстоянием между элементами A и B*.

Обычно мы встречаемся с ситуацией, когда способ вычисления расстояний задан (уже кем-то придуман). Но как поступать в случае, когда подобного правила еще нет?

В принципе существует универсальный способ введения расстояния на любом множестве, вне зависимости от природы его элементов. Достаточно положить расстояние между разными элементами множества равным единице:

$$\mathrm{dist}(A, B) = 1 \text{ при } A \neq B,$$

а между совпадающими — нулю:

$$\mathrm{dist}(A, B) = 0 \text{ при } A = B.$$

Нетрудно убедиться в том, что все три условия определения выполнены, причем неравенство треугольника всегда будет строгим (за исключением тривиального случая, когда среди элементов A, B и C есть совпадающие).

Вместе с тем, предложенное правило лишено привычного нам свойства, которое позволяло бы сравнивать расстояния, пользуясь словами *больше* и *меньше*, — расстояние между любыми двумя различными элементами оказывается всегда одним и тем же.

Существуют, разумеется, и другие правила исчисления расстояний. Наиболее распространенные опираются на использование *единицы измерения*, или *эталона длины.* Однако и здесь часто приходится сталкиваться с расстояниями, наделенными и иными, иногда довольно неожиданными свойствами.

Проиллюстрируем сказанное.

Этюд первый: внутренняя геометрия бумажного листа

Обычный лист бумаги имеет форму прямоугольника (рис.2). Пусть A и B — противоположные вершины. Как

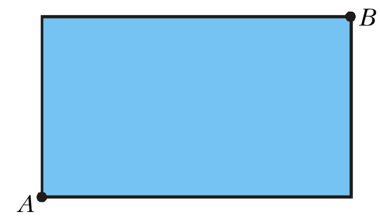

Рис. 2

вычисляется расстояние между ними? Да очень просто — точки A и B соединяются отрезком и измеряется его длина (рис.3). Это и будет искомым расстоянием.

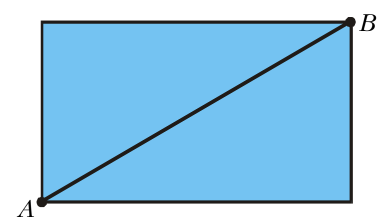

Рис. 3

Теперь немного изогнем лист. Например, так, как это показано на рисунке 4. И вновь поставим тот же

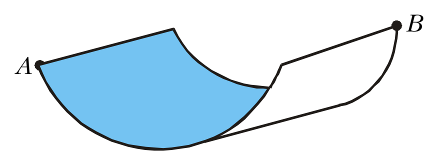

Рис. 4

вопрос: как вычислить расстояние между точками A и B? Кажется, тоже

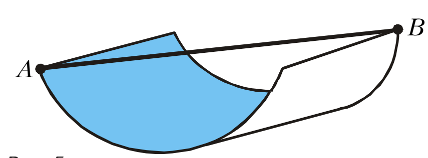

Рис. 5

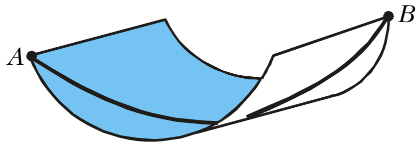

Рис.6

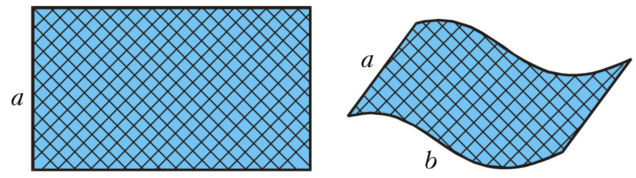

Рис. 9

очень просто: соединим точки A и B отрезком и измерим его длину (рис.5).

Рассмотрим, однако, тот же изогнутый лист, но на этот раз с прочерченной на нем диагональю AB (рис.6), длина которой (при деформации листа она не изменилась) определяла ранее расстояние между точками A и B. Она определяет его и теперь.

Итак, расстояние между точками A и B на изогнутом бумажном листе можно вычислять по-разному, причем, как нетрудно заметить, расстояние между точками A и B, вычисленное описанными способами, приводит к разным результатам (ясно, что длина отрезка AB на рисунке 5 меньше длины диагонали AB на рисунке 6).

Изгибая бумажный лист чуть сильнее, мы легко убеждаемся в том, что длина отрезка AB становится меньше (рис.7), в то время как длина изогнутой диагонали остается неизменной.

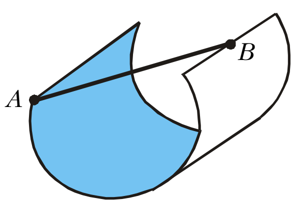

Рис. 7

Теперь представим себе, что мы находимся на краю оврага в точке A и хотим попасть на другой его край – в точку B. Выбранный путь будет зависеть от наших возможностей – если мы умеем перемещаться по воздуху (как муха), то это отрезок AB, если нет (как муравей) – то это искривленная диагональ (рис.8). Каждый из двух этих путей будет кратчайшим, но в первом случае самый короткий путь ищется среди всех возможных путей, соединяющих точки A и B, а во втором – среди всех путей, соединяющих точки A и B и проходящих по дну оврага.

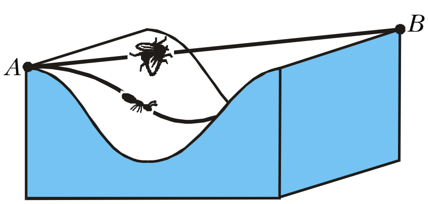

Рис.8

Таким образом, если разрешено перемещение только по листу бумаги, то кратчайшим путем всегда будет искривленная диагональ (с неизменной длиной), а если никаких ограничений нет и допускается перемещение вне изогнутого листа, то кратчайшим окажется прямолинейный отрезок переменной длины.

И мы можем сделать следующий важный вывод: точки бумажного листа связаны числовыми характеристиками, которые не зависят от того, как именно этот лист располагается в пространстве.

Заметим также, что при любых деформациях листа (без растяжений и разрывов) неизменна и его площадь – она всегда остается равной ab (рис.9).

Возможное ощущение неожиданности сделанного вывода, если оно и появилось, может быстро исчезнуть, если рассмотреть следующую ситуацию. В помещении, имеющем форму, изображенную на рисунке 10, требуется указать самый короткий путь от окна C к окну D. Стены не позволяют идти напролом, и поэтому искомый маршрут будет слагаться из трех прямолинейных отрезков CE, EF и FD. (Вместо стен может быть просто проведенная на земле линия, переступать которую запрещено.) Таким образом, оставаясь внутри помещения и решая поставленную задачу, мы получаем один результат, а имея возможность выходить вовне – другой.

Тем самым, можно говорить и о внутренней геометрии путей (путей с ограничениями), и о внешней геометрии путей (путей без ограничений), и эти две геометрии оказываются разными.

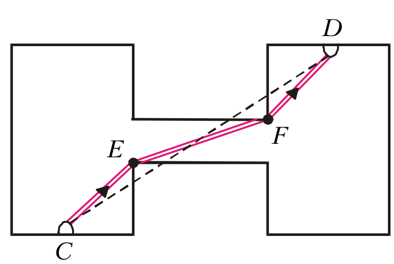

Рис.10

В качестве примера рассмотрим куб со стороной, равной 1 (рис.11). Расстояние между его противоположными вершинами A и B равно $\sqrt{3}$ – длине диагонали куба AB. Если же вычислять расстояние между этими

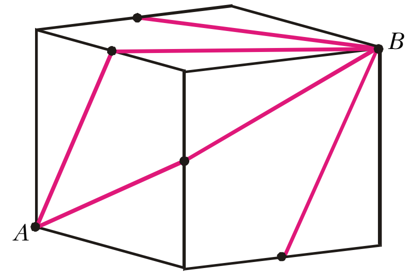

Рис.11

точками, не уходя с поверхности куба, то оно окажется равным

$$2\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{5},$$

причем путей такой длины будет целых шесть.

Этюд второй: расстояние в один фарсах

Вспомним, как начинается «Песнь о вещем Олеге» [1] –

Как ныне сбирается вещий Олег
Отмстить неразумным хазарам:
Их села и нивы за буйный набег
Обрек он мечам и пожарам...

Название «хазары» было известно уже первому русскому летописцу, автору «Повести временных лет», и с тех пор упоминалось в русской исторической литературе неоднократно. Огромное количество сведений о хазарском народе, иногда совпадающих, а иногда исключающих одно другое, оставили и другие соседи. Но документом, дающим самые исчерпывающие сведения о хазарах, является письмо хазарского царя Иосифа в Испанию к сановнику халифа Абдрахмана III – Хасдаи ибн Шафруту, написанное в середине X века.

В этом письме Иосиф сообщает, в частности, расстояния от своей столицы до границ хазарского царства: на восток до Гирканского (Каспийского) моря – 20 фарсахов, на юг до реки Уг-ру (Терек) – 30 фарсахов, на север до реки Бузан (Дон) и «до склона нашей реки к морю Гирканскому» (т.е. до сближения излучин Дона и Волги в современном месте Волго-Донского канала) – 20 фарсахов.

Казалось бы, пользуясь этим описанием, найти место, где когда-то располагалась столица Хазарского каганата, обширный и многолюдный Итиль, дело простое. Достаточно перевести фарсахи в километры и провести несложные геометрические построения.

Тридцать семь лет назад вышел капитальный труд по истории хазар [2], где можно прочесть, какие победы одерживали хазары и какие терпели поражения, но нельзя получить удовлетворительного представления о том, где они жили, где были расположены те «села и нивы», каковы были их быт и культура. Оценивая территорию Хазарского каганата в междуречье Волги, Дона и Терека, М.И.Артамонов отмечает, что до сих пор точно не установлено местонахождение главнейших городов хазар, неизвестны их вещественные остатки.

Действительно, к моменту написания этой книги никто из историков не знал, в каком именно месте в низовьях Волги находилась столица Хазарского каганата Итиль. Общепринятая величина фарсаха – 5,5 км – противоречила всем расчетам. Геометрические построения, основанные на этом эталоне, приводили в места со столь скудными археологическими находками, что становилось ясно – нужно внести в методику поиска существенные изменения. Задача казалась неразрешимой.

Конечно, можно попытаться объяснить неудачи ученых тем, что в X веке картография находилась в весьма зачаточном состоянии. Но не будем торопиться с выводами, а возьмем современный географический атлас и откроем его на карте Европейской части России.

Если поставить одну ножку циркуля в центр Москвы, вторую – в Вышний Волочёк и провести через него окружность радиусом, равным раствору циркуля, то эта окружность пройдет через Ярославль, Иваново и Касимов. По раствору циркуля и масштабу карты несложно определить расстояние до каждого из этих городов. Оно, разумеется, будет одним и тем же. Вместе с тем, время, необходимое для того, чтобы попасть из Москвы в каждый из городов, потребуется разное – как сложатся обстоятельства. Значит, если измерять расстояние временными затратами, то результаты окажутся совсем иными.

Итак, расстояния можно измерять разными способами. Разными будут и результаты, и свойства самих расстояний. Вооружившись этими полезными наблюдениями, вновь вернемся к проблеме отыскания Итиля.

Все говорило о необходимости разобраться с эталоном длины. Это и было сделано М.И.Артамоновым и Л.Н.Гумилевым. В книге [3] об этом написано довольно подробно и увлекательно. Фарсах оказался довольно своеобразной единицей измерения расстояния – он был мерой не длины, а усилий, которые человек должен был затратить, чтобы достигнуть цели. А это означало, что длина фарсаха зависела и от рельефа местности, и от направления перемещения. Иными словами, для фарсаха привычное свойство симметричности расстояния,

$$\mathrm{dist}(A, B) = \mathrm{dist}(B, A),$$

явно нарушалось.

Длина фарсаха (5,5 км) была высчитана европейцами в условиях пересеченного Иранского плоскогорья. Ясно, что в ровных, как стол, прикаспийских степях она должна быть значительно больше. Исследователи остановились на 10 км. После соответствующих сопоставлений, геометрических расчетов и построений, опирающихся на новую длину фарсаха, место расположения Итиля было рассчитано с достаточной точностью. Последовавшие затем экспедиции подтвердили результаты расчетов – столица Хазарского каганата была найдена.

Кстати, современным аналогом фарсаха, обладающим весьма похожими свойствами, является таджикский чакрым. Если идти в гору или по болоту – чакрым короткий, если с горы или по хорошей дороге – длинный.

В жизни мы часто сталкиваемся с весьма разными «расстояниями», в которых нарушается подчас не только симметричность. Бывает, что и эталоны длины, называемые одним и тем же словом, оказываются далеко не одинаковыми – в разное время и в разных местах Руси под саженью понималась мера длины от 152 до 213 сантиметров (правда, мерой усилий сажень уже не была).

Литература

1. *Пушкин А.С.* Собрание сочинений в десяти тома. Т.I. – М.: Правда, 1981.

2. *Артамонов М.И.* История хазар. – Л.: Труды Гос. Эрмитажа. 1962.

3. *Гумилев Л.Н.* Открытие Хазарии. – М.: ДИ-ДИК, 1996.