Суммы квадратов и целые гауссовы числа

1. а) $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$;
б) $50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$.
4. *Указание*. $21 = 3 \cdot 7$.
5. а) 0, 1, 3, 4, 5 или 9.
6. Рассмотрим числа $1^2, 2^2, \ldots, (p-2)^2, (p-1)^2$. При любом p строка остатков этих чисел симметрична, т. е. читается слева направо так же, как справа налево. Это легко объяснить: остатки от деления на p чисел x^2 и $(p-x)^2 = p(p-2x) + x^2$ совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть числа $1^2, 2^2, \ldots$ $\ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Все они при делении на p дают разные остатки. Действительно, если бы какие-то два из этих чисел, скажем r^2 и s^2, где $r \neq s$, давали одинаковые остатки, то разность $r^2 - s^2 = (r-s)(r+s)$ делилась бы на p. Но ни $(r-s)$, ни $(r+s)$ не делятся на p (объясните, почему!).
7. а) *Первый способ*. Нечетное число при делении на 8 может дать один из остатков 1, 3, 5 и 7. Квадраты этих чисел (1, 9, 25 и 49) при делении на 8 дают остаток 1.
Второй способ. $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$, где n или $n+1$ четно.
Третий способ. $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$, где при нечетном x один множитель четен, а другой кратен 4.
в) Если все три числа x, y, z четны, то разделим обе части уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 4^m(8n+7)$ на 4. Так будем делать до тех пор, пока хотя бы одно из чисел x, y, z не станет нечетным. Поскольку квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1, а квадрат любого целого числа – остаток 0, 1 или 4, и поскольку ни одна из сумм $1+0+0$, $1+0+1$, $1+0+4$, …, $1+4+4$ не дает при делении на 8 ни остатка 7, ни остатка 4, ни остатка 0, получаем желанное противоречие.
Замечание. Гаусс доказал, что в виде суммы квадратов трех целых чисел представимы все натуральные числа, кроме чисел вида $4^m(8n+7)$, где m, n – целые неотрицательные числа. (В современном изложении этот факт доказан в «Курсе арифметики» Ж.Серра. Там использованы p-адические числа, символ Гильберта и теорема Минковского—Хассе.)

8. а) Если $n = x^2 + y^2$, где x, y – целые числа, то $\frac{n}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. Если бы одно из чисел x, y было четным, а другое нечетным, то сумма квадратов $x^2 + y^2$ была бы нечетной. Значит, числа x, y оба четны или оба нечетны. Следовательно, числа $(x+y)/2$ и $(x-y)/2$ – целые.
б) *Указание*. Если $x^2 + y^2$ кратно 5, то $(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2 = x^2 + y^2 - 5y^2$ кратно 5. Если, например, $x - 2y$ кратно 5, то $2x + y = 2(x-2y) + 5y$ тоже кратно 5.
в) Если $x^2 + y^2$ кратно 13, то $(2x-3y)(2x+3y) = 4x^2 - 9y^2 = 4(x^2+y^2) - 13y^2$ кратно 13. Если, например, $2x - 3y$ кратно 13, то $3x + 2y = 8(2x-3y) - 13x + 26y$ тоже кратно 13.
То же самое можно изложить на языке сравнений. Поскольку $x^2 \equiv -y^2$ и $3^2 \equiv -2^2 \pmod{13}$, имеем $3^2x^2 \equiv 2^2y^2$, т. е. $(3x+2y)(3x-2y) \equiv 0 \pmod{13}$, откуда следует, что хотя бы одно из чисел $3x+2y$ и $3x-2y$ кратно 13. Дальнейшее очевидно.
12. Рассмотрите числа вида $21 \cdot 5^n$ (или $3^{2n-1} \cdot 7$).
13. а) Если $n^2 + 1$ кратно d, то кратно d и каждое из чисел вида $(n+dk)^2 + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$.
б) Число $n^2 + 1$ кратно 65 тогда и только тогда, когда оно кратно 5 и 13. Поскольку $n^2 + 1 = n^2 - 4 + 5 = (n-2)(n+2) + 5$ и $n^2 + 1 = n^2 - 25 + 26 = (n-5)(n+5) + 26$, число n при делении на 5 должно давать остаток 2 или 3, а при делении на 13 – остаток 5 или 8. Таких чисел среди первых 65 натуральных чисел всего четыре: 8, 18, 47 и 57. *Ответ*: 62.
15. Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив затем к обеим частям 1, получим: $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$. Поскольку правая часть не может иметь натуральных делителей вида $4x - 1$, имеем: $x \le 0$. По той же самой причине $y \le 0$. *Замечание*. Рассматриваемое уравнение имеет бесконечно много решений в целых числах. Например, $x = 0$, $y = -z^2$ или $x = -1$, $y = -5n^2 - 2n$, $z = -5n - 1$.
16. а) Если n нечетно, то $n^2 - 1$ кратно 4, а число $m^2 + 1$ не кратно 4 ни при каком целом m. Если же $n = 2k$, то $n^2 - 1 = 4k^2 - 1$ дает остаток 3 при делении на 4.
б) Перенесем x^2 и y^2 в левую часть и прибавим 1 к обеим частям. Получим: $(x^2-1)(y^2-1) = z^2 + 1$. В силу пункта а), $x = y = 0$, откуда $z = 0$.
17. Вообще, при простом $p > 2$ числа вида $(p-k-1)! \cdot k! + (-1)^k$ кратны p.
22. а) $-i$; б) 1; в) $-i$; г) 0; д) -64; е) -1.
23. Равенство комплексных чисел $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Любитель тождеств заметит, что $\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$. (Впрочем, теорема 5 позволяет написать это равенство сразу, без тождеств.) Зная величины $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ и $x^2 - y^2 = a$, находим $x^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} + a\right)/2$ и $y^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)/2$.
Ответ: если $b \ge 0$, то $x = \pm\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2}$ и $y = \pm\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2}$; если $b < 0$, то $x = \pm\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2}$ и $y = \mp\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2}$.

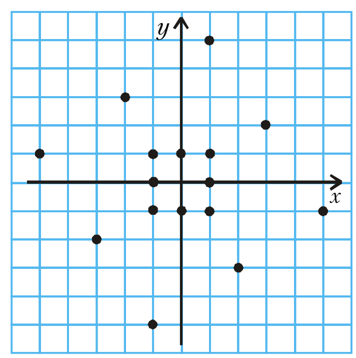

Рис. 1

25. Когда a и b одной четности, т. е. когда сумма $a + b$ четна.
26. в) Кратные числа $5 + 5i$.
28. Точки z, iz, $-z$, $-iz$ – вершины квадрата с центром в нуле.
31. *Указание*. $5 - i = (1+i)(2-3i)$. Ответ изображен на рисунке 1.
32. а) $3 - 11i - (1+i)(4+7i)$. Делители числа $4 + 7i$ содержатся среди делителей числа $(4+7i)(4-7i) = 4^2 + 7^2 = 65 = 5 \cdot 13 = (1+2i)(1-2i)(2+3i)(2-3i)$. Значит, число $4 + 7i$ есть произведение простого гауссова делителя числа 5 на простой гауссов делитель числа 13 (объясните, почему!). *Ответ*: 7. (Легко вычислить, что $3 - 11i = (1+i)(1-2i)(2-3i)$.) б) $6 + 12i = 3(1+i)(1-i)(1+2i)$. *Ответ*: 8.
33. а) $16 = (1+i)^8$. б) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot (3+2i) \cdot (3-2i)$.
в) Благодаря результату упражнения 29, $47 + i$ кратно числу $1 + i$. Разделив $47 + i$ на $1 + i$, получаем равенство $47 + i = (1+i)(24-23i)$. Поскольку $(24-23i)(24+23i) = 24^2 + 23^2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, в разложение числа $24 - 23i$ на простые гауссовы множители входят по одному простому делителю каждого из чисел 5, 13, 17.
Ответ: $47 + i = (1+i)(2+i)(3+2i)(-1-4i)$.
35. $1000009 = 293 \cdot 3413$. Пусть $a = 1000$, $b = 3$, $c = 235$, $d =$

= 972. Тогда $ac + bd = 237916$ и $ac - bd = 232084$. Произведение $237916 \cdot 232084$ кратно 1000009. Вычислим наибольший общий делитель чисел 237916 и 1000009. Поскольку $1000009 = 4 \cdot 237916 + 48345$, имеем НОД(1000009,237916) = = НОД(48345, 237916). Далее, $237916 = 5 \cdot 48345 - 3809$. Значит, НОД(48345, 237916) = НОД(48345, 3809) = = НОД(13 · 3809 − 1172, 3809) = НОД(1172, 3809) = = НОД(1172, 3 · 1172 + 293) = НОД(1172, 293) = 293. (Аналогично можно было бы найти НОД(1000009, 232084) = = 3413.)

36. а) 1; б) $\sqrt{5}$; в) 5; г) $\sqrt{65}$.

38. $4(a_1 + 1)\ldots(a_r + 1)$.

39. Не может.

40. а) В разложение n на натуральные простые множители простые числа вида $4k - 1$ должны входить только в четных степенях, а простой множитель вида $4k + 1$ может быть не более чем один, причем не более чем в первой степени.

б) Число n должно иметь вид $n = 2^m p^a Q^2$, где $p = 4k + 1$ – простое число, $a \le 2$, Q – произведение простых чисел вида $4k - 1$, причем m должно быть четным при $a = 2$ и нечетным при $a = 0$.

в) В разложение n на натуральные простые множители не должны входить простые числа вида $4k - 1$, число 2 может войти в степени не выше первой, а простой множитель вида $4k + 1$ может быть не более чем один.

42. *Указание*. Воспользуйтесь результатом упражнения 38 и подумайте, как изменяется разность между количеством натуральных делителей вида $4k + 1$ и количеством натуральных делителей вида $4k + 3$ при переходе от числа n к числам pn, p^2n, p^3n, ..., где p – простое число вида $4k + 3$, не являющееся делителем числа n.

Калейдоскоп «Кванта»

Задачи

Вопросы и задачи

1. Нет, так как относительные изменения силы тяжести всех элементов тела одинаковы.

2. Нет. Условие существования центра тяжести – однородность поля тяготения. В неоднородном гравитационном поле повороты «гантели» вокруг ее центра масс приводят к тому, что линии действия L_1 и L_2 равнодействующих сил тяжести, приложенных к шарикам, не имеют общей точки (рис.2).

3. При торможении на колеса со стороны дороги действует сила трения, создающая вращающий момент вокруг центра масс автомобиля.

4. Пара сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ сообщает телу вращение по часовой стрелке вокруг его центра масс, лежащего правее точки B. Следовательно, точка B станет двигаться против направления силы $\vec{F}_2$.

5. Силы трения, сообщающие автобусу центростремительное ускорение, приложены не к его центру масс, а к нижним точкам колес, поэтому кузов автобуса движется по кривой большего радиуса, чем колеса.

6. Работа равна $mgL/2$, так как центр тяжести каната оказался поднят на высоту $L/2$.

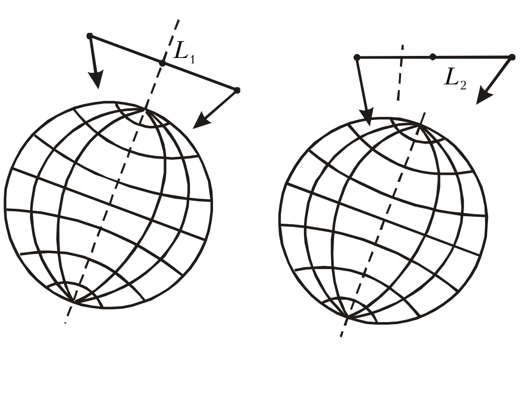

Рис. 2

7. В дырке!

8. Центр тяжести системы сначала будет понижаться, а потом – повышаться.

9. Длиной $2\Delta l$.

10. В точке O — середине отрезка O_1O_2, соединяющего середины участков AB и BC стержня (рис.3).

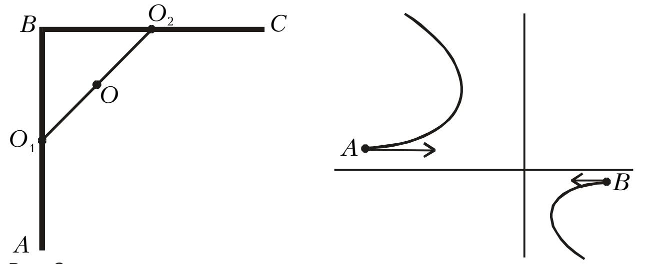

Рис. 3 *Рис. 4*

11. Центр тяжести лежит на середине биссектрисы угла, в вершине которого находится шар массой $2m$.

12. В центре шара.

13. Станция придет во вращение в противоположную сторону, причем ее центр будет описывать окружность вокруг общего с космонавтом центра масс.

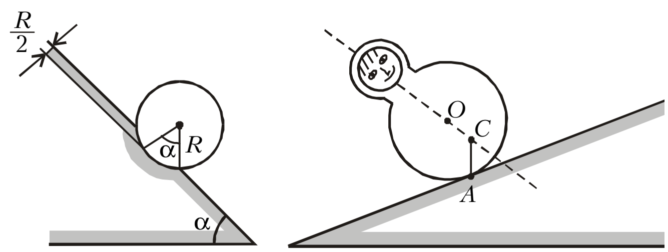

Рис. 5 *Рис. 6*

14. Тележка и находящаяся в сосудах вода будут совершать колебания вокруг общего центра масс. После того как уровни воды в сосудах окончательно сравняются, движение тележки прекратится.

15. Траектория частицы массой m получается растяжением с коэффициентом подобия 2 траектории частицы массой $2m$ (рис.4).

16. Центр тяжести человека на ходулях значительно повышается, а площадь его опоры на землю уменьшается.

17. Во втором случае, так как центр масс канатоходца с ведрами лежит ниже, т.е. ближе к опоре – канату.

18. Центр тяжести системы карандаш – нож лежит ниже точки опоры.

19. При $\alpha > \pi/3$ (рис.5).

Микроопыт

Центр тяжести C неваляшки находится ниже геометрического центра O шарообразной поверхности «туловища». В положении равновесия точка C и точка касания A игрушки с наклонной плоскостью должны находиться на одной вертикали; следовательно «голова» неваляшки отклонится влево (рис.6).

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» № 2)

1. Обозначим цифры b_1, b_2, b_3, b_4 таким образом, что

$$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge b_4.$$

Тогда

$$0 \le b_1 + b_3 - b_2 - b_4 \le 9.$$

Действительно,

$$b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) \geq 0,$$

левое неравенство доказано. Справедливо и правое неравенство:

$$b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) \leq$$
$$\leq (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4 \leq b_1 \leq 9.$$

2. Синеглазка задумала число 1981. Поскольку разность между произвольным натуральным числом и суммой его цифр кратна 3, а число 2000 на 3 не делится, то Незнайка, очевидно, ошибся.

3. Разобьем упомянутые 6 расстояний на 3 пары, где в состав каждой пары входит расстояние от искомой точки до одной из трех вершин и от искомой точки до противоположной стороны. Заметим, что сумма этих двух значений не меньше высоты, опущенной из вершины на сторону, причем равенство достигается только если искомая точка лежит на высоте. Таким образом, сумма всех указанных в условии расстояний не меньше суммы высот данного треугольника, причем равенство достигается только в случае, когда искомая точка принадлежит каждой из трех высот, т.е. является точкой пересечения высот. Для остроугольного треугольника она как раз находится внутри треугольника.

4. ТЕТИВА = 141376.

5. Разность масс девяти железных гирек и девяти бронзовых гирек может равняться 90 г лишь в одном случае, когда девять более легких из них имеют массы 1 г, 2 г, …, 9 г, а девять более тяжелых – массы 11 г, 12 г, …, 19 г. Следовательно, масса золотой гирьки 10 г.

Конкурс «Математика 6—8»

Задачи

(см. «Квант» №6 за 1998 год)

11. Искомое число должно одновременно делиться на 9 и на 11. Согласно признаку делимости на 9, сумма S цифр искомого числа должна делиться на 9, а поскольку все его цифры четные, то и на 18. Обозначим $S = 18z$, где z – некоторое натуральное число. Применим признак делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи этого числа, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11. Обозначим сумму цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи искомого числа, через $2x$, а сумму цифр, стоящих на нечетных местах, – через $2x + 22y$ (все цифры искомого числа – четные!), где x, y – целые неотрицательные числа, причем $x + y > 0$. Имеем равенство $2x + 2x + 22y = 18z$, или $2x + 11y = 9z$. Отсюда $z = \frac{2x+11y}{9} = y + \frac{2(x+y)}{9}$ может быть целым числом лишь когда $2(x + y) = 9u$, где u – целое. Отсюда $x + y = 9t$; $u = 2t$, где t – некоторое целое, причем, учитывая ограничение $x + y > 0$, заключаем, что число t может быть только натуральным.

Следовательно, $z = y + \frac{2\cdot 9t}{9} = y + 2t$. Поскольку t – натуральное число, а y – целое неотрицательное, то область возможных значений z находится среди множества чисел 2, 3, 4, 5, 6,… Соответственно, сумма цифр $S = 18z$ в искомом числе принадлежит множеству чисел 36, 54, 72, …

Построим требуемое число с суммой цифр 36. Полусумму – число 18 – можно представить тремя различными способами в виде суммы наименьшего количества четных слагаемых: 18 = 6 + 6 + 6 = 4 + 6 + 8 = 2 + 8 + 8. Наименьшее шестизначное число, которое можно построить из этих цифр, – 228888.

Для построения числа с суммой цифр 54 и более потребуется не менее шести четных цифр, что заведомо даст число, превышающее 228888. Таким образом, искомое число – 228888.

12. Первый кондуктор может продать все 175 билетов. Для этого ему достаточно действовать так, чтобы после его ухода не было пассажиров, к которым подходили два раза (тогда второй кондуктор не сможет продать ни одного билета). Ясно, что после первого хода это условие выполняется. Предположим, что оно выполняется после очередного хода первого кондуктора, и покажем, что он может обеспечить его выполнение и после следующего своего хода. Если второй кондуктор подходит к какому-то пассажиру, к которому уже подходили, то первый может подойти к тому же пассажиру (в третий раз) и продать ему билет.

Если же второй подходит к пассажиру, к которому еще не подходили, то первый может найти еще одного пассажира, к которому ни разу не подходили. Действительно, если после хода второго таких пассажиров не осталось, то к каждому подходили один или три раза, а так как пассажиров нечетное число, то общее количество подходов кондукторов к пассажирам нечетно. Но это количество должно быть четным, так как первый и второй кондукторы сделали поровну ходов.

13. Каждым ходом конь сдвигается на 2 клетки в одном направлении и на 1 клетку в другом. Значит, за 8 ходов сумма сдвигов коня равна 8 · 3 = 24. Если конь побывал на всех горизонталях, то он прошел с самой нижней до верхней и спустился назад. Значит, сумма сдвигов по вертикали не меньше 7 + 7 = 14. Аналогично, сумма горизонтальных сдвигов не меньше 14. Поскольку 14 + 14 > 24, конь не мог за 8 ходов побывать на всех горизонталях и вертикалях и вернуться на исходное поле.

14. На стороне BC построим точку M такую, что $B_1M \parallel AB$, на стороне AB построим точку C_1 такую, что $MC_1 \parallel AC$, на стороне AC построим точку N такую, что $C_1N \parallel BC$ и на стороне BC построим точку A_1 такую, что $NA_1 \parallel AB$ (рис.7). Докажем, что площади треугольников AC_1B_1, BA_1C_1 и CB_1A_1 равны. Площади параллелограммов AC_1MB_1 и BA_1NC_1 равны, так как каждый из них равновелик параллелограмму C_1MCN.

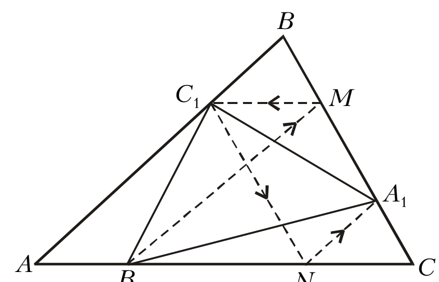

Рис. 7

Значит, треугольники AC_1B_1 и BA_1C_1, занимая половину площадей равновеликих параллелограммов AC_1MB_1 и BA_1NC_1, равновелики. Аналогично проверяется равновеликость других пар треугольников.

15. Назовем точки, разбивающие окружность на дуги, узловыми и отнесем их к тем дугам, которые расположены по отношению к ним по часовой стрелке. Замечаем, что если блоха хотя бы раз попадет в такую точку, то все ее дальнейшие прыжки будут происходить в соседние узловые точки, и, таким образом, блоха побывает на всех дугах.

Предположим, в начальный момент блоха находится внутри некоторой дуги l. Если после кругового путешествия блоха попадет в исходную точку старта, то она непременно побывает на всех дугах. Если же этого не произойдет – какие-то дуги окажутся перепрыгнутыми, – то, попав на дугу l, блоха сместится в сторону узловой точки этой дуги, причем смещение будет равно сумме длин перепрыгнутых дуг. Далее, стартуя уже из этой новой точки, блоха после завершения кругового маршрута либо побывает на всех дугах, либо опять сместится к узловой точке дуги l (возможно, уже на другую величину). Не более чем за n круговых маршрутов, где n – количество дуг, блоха либо побывает на всех дугах, не посетив при этом ни одной узловой точки, либо окажется в узловой точке дуги l, и в дальнейшем уже не минует ни одной дуги, прыгая по узловым точкам.

Коварные проценты

1. Первоначально арендную плату предлагали увеличить не на 300, как думал автор, а на 200 процентов.
2. Сбор увеличен не на 2, а на 200 процентов (это все равно, что стоимость проезда увеличилась с 1 рубля до 3 рублей). В таких случаях иногда говорят, что сбор увеличился на 2 *процентных пункта.*
3. 400 г.
4. Жирность масла 80% говорит о том, что в 730 тыс. тонн масла содержится $730 \times 0{,}8$ тыс. тонн жира. Если это количество жира перераспределить в $730 \cdot 1{,}5$ тыс. тонн масла, то последнее будет иметь жирность $\frac{0{,}8}{1{,}5} \cdot 100\% \approx 53\%$, что не соответствует действительности.
5. Если жирность добавляемых n килограммов молока $p\%$, то должно выполняться соотношение $82 \cdot 1000 + np = 72{,}5 \cdot 1100$, что невозможно ни при каком n, даже для обезжиренного ($p = 0$) молока. Значит, слишком скромно (100 кг) оценен «коммерческий навар». Обозначив его через x(кг), получим соотношение $82 \cdot 1000 + np = 72{,}5 \cdot (1000 + x)$, откуда следует, что $x > 131$ (кг).

Ловушка для треугольника

1. Наименьший угол треугольника равен

$$\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

2. *Указание.* Умножьте скалярно вектор в левой части на себя и воспользуйтесь тождеством

$$2\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - \left(\vec{v} - \vec{u}\right)^2.$$

3. а) К вектору $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB}$ примените формулу (1) из статьи с $z = 0$.
б) Используйте результат упражнения 7,а) и формулу (3).
4. Оба утверждения следуют из соотношений $a_1 + b_1 = c$, $b_1 + c_1 = a$, $c_1 + a_1 = b$.
6. а) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$, вторая скобка выражается с помощью упражнения 5; б) аналогично а); в) добавляя к левой части $3abc = 12Rrp$, получим $(a + b + c)(ab + bc + ca)$.
7. а) *Указание.* Пусть $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH'}$; проверьте, что отрезки AH' и BH' перпендикулярны сторонам BC и CA соответственно, т.е. $\vec{AH'} \cdot \vec{BC} = \vec{BH'} \cdot \vec{CA} = 0$.
б) *Указание.* Используйте теорему об отношении, в котором биссектриса треугольника делит сторону.
в) следует из а) и б).
8. Из упражнения 7,в) и формулы (3) следует, что $IH^2 = 4R^2 - \left[(1 - a/2p)(1 - b/2p)c^2 + \ldots\right]$. Вычитаемое после раскрытия скобок приводится к виду

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a\right)\Big/2p + abc/2p$$

и преобразуется с помощью формул из упражнения 6.
9. *Указание.* Сравните формулу (2) и упражнение 7,а).
10. *Указание.* Используйте упражнение 7,б) и формулы (3) и (4).
11. Во-первых, заметим, что $d + r < R$, т.е. меньшая окружность ω лежит внутри большей окружности Ω. Пусть касательные к ω, проведенные из точки A, произвольно взятой на Ω, пересекают Ω в точках B и C (рис.8). Будем изменять радиус окружности ω, не меняя ее центра. Ясно, что если он достаточно мал, то соответствующая этой маленькой окружности ω_1 хорда B_1C_1 будет лежать вне ω_1, а окружность ω_2, «почти касающаяся» Ω, будет пересекать соответствующую ей хорду B_2C_2. Поэтому найдется промежуточная окружность ω_0 радиуса r_0, которая касается соответствующей ей

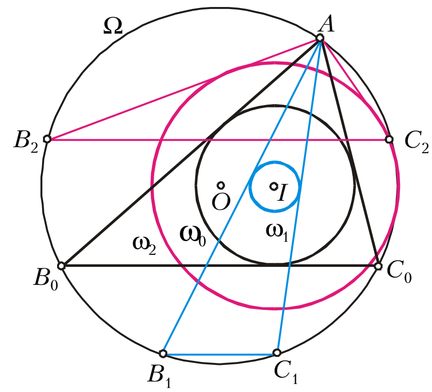

Рис. 8

хорды. По формуле Эйлера, $R^2 - 2Rr_0 = d^2 = R^2 - 2Rr$. Следовательно, ω_0 совпадает с ω.
12. Векторное равенство следует из того, что $\vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{OH}$, и из формул упражнения 7. Применяя к нему (3), получим $4p^2 \cdot IF^2 = p^2R^2 - \left(a_1b_1c^2 + b_1c_1a^2 + c_1a_1b^2\right)$, где, согласно нашим обозначениям, $a_1 = p - a$ и т.д.; выражение в скобках с учетом приведенных в статье формул для симметрических многочленов от a_1, b_1 и c_1 можно преобразовать так:

$$a_1b_1c^2 + \ldots = \left(a_1b_1\left(c^2 - p^2\right) + a_1b_1p^2\right) + \ldots =$$

$$= -a_1b_1c_1(c + p + b + p + a + p) + p^2\left(a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1\right) =$$

$$= -5pa_1b_1c_1 + p^2\left(r^2 + 4rR\right) = p^2\left(-5r^2 + r^2 + 4rR\right),$$

откуда $4IF^2 = R^2 - 4rR + 4r^2 = (R - 2r)^2$.
13. Проведем из P прямую через центр O данной окружности. Пусть она пересекает окружность в точках A_1 и B_1

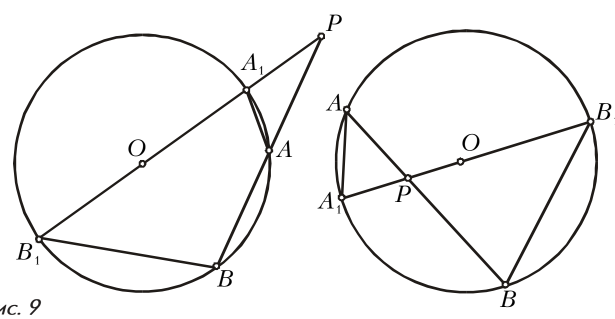

Рис. 9

(рис.9). Из теоремы о вписанном угле следует, что треугольники PAA_1 и PB_1B подобны, поэтому $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1 = |d - R| \cdot (d + R)$.
14. При $k = 1$ прямая Эйлера должна касаться вписанной окружности в точке H. Но если выполнено уравнение (8), то центр F окружности 9 точек попадает внутрь вписанной окружности (легко проверить, что $IF = R/2 - r < r$ при $r = \left(\sqrt{11} - 3\right)R$) и, стало быть, прямая Эйлера пересекается с ней. Можно и не ссылаться на уравнение (8), а прямо из условий $IH = r$ и $OH^2 + IH^2 = OI^2$ вывести равенство $r = 2R$.
15. *Указание*. Покажите, что угол между прямыми AH и AB равен углу между прямыми AO и AC (оба угла равны $|\pi/2 - \angle ABC|$).
16. Из формулы упражнения 6,а) следует, что $8R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 2(2R + r)^2 - 2p^2$. В то же время $8R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = OH^2 - R^2$ (см. упражнение 3,б)). Орто-

центр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника, т.е. и внутри его описанной окружности, прямоугольного – в вершине, т.е. на описанной окружности, а тупоугольного – вне треугольника и, как легко понять, вне окружности. Эти три случая задаются соотношениями $OH < R$, $OH = R$ и $OH > R$.

17. Условие $OH > OI$ переписывается в виде $4R^2 + 5Rr + r^2 > p^2$. Но из формулы (7) для расстояния IH следует, что $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq p^2$. Остается сложить это неравенство с неравенством $Rr - 2r^2 \geq 0$, которое обращается в равенство только для правильного треугольника.

Аналогично, перепишем $OH > IH$ в виде $5R^2 + 4Rr - r^2 > p^2$, и оно получается добавлением к тому же неравенству, что и выше, неравенства $R^2 - 4r^2 \geq 0$.

Заряженные частицы и поля

1. $h = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2AmU}{e}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{(LB)^2 e}{2AmU}}\right) = 1{,}9$ см.

2. $v_{\min} = \frac{\sqrt{2Ue/m}}{\cos\alpha} = 9{,}2\cdot 10^6$ м/с.

3. $x = \frac{d\mathrm{E}_2}{2\mathrm{E}_1} = 0{,}4d$. **4.** $B_{\min} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$.

III Международная астрономическая олимпиада

Теоретический тур

8—10 классы

1. Поскольку Луна совершает один оборот вокруг оси относительно направления на Солнце за один синодический месяц, равный 29,53 сут, в любой точке ее поверхности Солнце видно над горизонтом в течение примерно двух недель; следующие две недели его не видно. А вот Земля постоянно видна только из одного полушария Луны (мы называем его «видимой стороной Луны»), а из другого полушария («обратная сторона Луны») Землю не видно никогда. Поэтому на видимой стороне Луны чаще можно увидеть Землю, а на невидимой – Солнце.

2. Легко видеть, что Англия и Новая Зеландия расположены на земном шаре почти диаметрально противоположно. Следовательно, траектория полета снаряда будет весьма близка к половине траектории облета вокруг Земли искусственного спутника, движущегося по низкой орбите. Как известно, продолжительность такого оборота около 1,5 часа; значит снаряд долетит до цели примерно за 45 минут.

3. Вспомнив величину наклона земной оси ($\varepsilon = 23{,}5°$), без труда определим, что северный полюс эклиптики имеет прямое восхождение 18^{h} и склонение 66,5°.

4. Если в процессе коллапса Солнце не потеряло вещество и не излучило гравитационные волны, то его масса не изменилась. Поэтому не изменится ни орбита Земли, ни ее орбитальный период.

5. При диаметре 3476 км Луна видна на земном небосводе под углом $31'$; значит, Море Кризисов будет видно под углом $31' \times 520/3476 = 4{,}6'$. Формально это в 3–5 раз превышает предел углового разрешения глаза. И действительно, зоркий глаз в хороших условиях способен различить Море Кризисов, что доказано зарисовками Луны, сделанными еще до изобретения телескопа.

6. Представим число 250 млн как $2{,}5\times 100\times 100\times 100\times 100$. Теперь ясно, что блеск одной звезды будет на $1^m + 5^m + 5^m + 5^m + 5^m = 21^m$ слабее блеска всей галактики, т.е. составит $9^m + 21^m = 30^m$.

11—12 классы

1. Метеоры, полярные сияния, радуга и серебристые облака – это атмосферные явления, а на Луне атмосферы нет; значит, они там не наблюдаются. А вот затмения Солнца Землей, искусственные спутники и кометы на Луне наблюдаются даже лучше, чем на Земле, поскольку не мешает атмосфера.

2. Поскольку все звезды-цефеиды Магеллановых облаков находятся примерно на одинаковых расстояниях от Земли, их блеск пропорционален светимости. Найденная астрономами зависимость «период-блеск» для цефеид в Магеллановых облаках натолкнула их на мысль, что существует зависимость «период-светимость». Наблюдения цефеид в любой другой галактике могли бы дать те же результаты: важно то, что расстояния от нас до галактик много больше, чем расстояния между исследуемыми звездами.

3. Перемещение точек равноденствия происходит по эклиптике, поскольку движение в пространстве испытывает плоскость земного экватора.

4. Поскольку центростремительное ускорение V^2/R спутнику сообщают сила гравитационного притяжения Земли GmM_0/R^2, из второго закона Ньютона найдем скорость движения спутника по круговой орбите: $V = \sqrt{GM_0/R}$. Отсюда, вспомнив, что $GM_0 = gR_0^2$, легко найти орбитальный период: $P = 2\pi R/V = 2\pi GM_0/V^3 = 2\pi g R_0^2/V^3 \approx 127$ мин. Теперь, используя уравнение синодического движения $1/T = 1/P - 1/P_0$ и учитывая, что спутник обращается в направлении движения Земли, имеющей период $P_0 = 24^{h}$, находим искомое время T:

$$T = P_0 P/(P_0 - P) \approx 139 \text{ мин}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
А.А.Васин, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.В.Родионова, В.В.Полякова, П.И.Шевелев

АРТ-ДИРЕКТОР
П.И.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №