

Ловушка для треугольника

В.ДУБРОВСКИЙ, В.СЕНДЕРОВ

МНОГО ЛЕТ НАЗАД НА ПРИЕМНОМ экзамене на физфак МГУ предлагалась следующая задача:

Упражнение 1. Медианы прямоугольного треугольника пересекаются на его вписанной окружности. Найдите углы этого треугольника.

Есть и другие задачи о треугольниках, в которых центроид (точка пересечения медиан) лежит на вписанной окружности. Например, треугольник, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части, фигурировал в задаче М1224 «Задачника «Кванта».

А как расположен относительно вписанной окружности ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника? Если треугольник правильный, то его ортоцентр находится в центре вписанной окружности. Ортоцентр неостроугольного треугольника, очевидно, лежит вне ее. Отсюда понятно, что, деформируя любой такой треугольник в правильный, мы обязательно пройдем через положение, в котором ортоцентр лежит точно на вписанной окружности.

А можно ли «посадить» на вписанную окружность сразу обе эти замечательные точки? Этот вопрос оказывается довольно сложным. Мы покажем, что ответ на него утвердительный:

треугольник, у которого и центроид, и ортоцентр лежат на вписанной окружности, существует.

Доказательство этого факта требует привлечения богатого арсенала методов и фактов геометрии треугольника, которые пригодятся читателям и при решении других задач.

Нам придется иметь дело с многочисленными соотношениями в треугольнике. Напомним стандартные обозначения его элементов (рис.1): стороны треугольника ABC обозначаются a ($= BC$), b , c ; центры вписанной и описанной окружностей — I и O , а их радиусы, соответственно, — r и R ; ортоцентр (точка пересечения высот) — H ,

центроид (точка пересечения медиан) — G .

В искомом треугольнике должно выполняться равенство $IG = IH = r$. Прежде чем заняться анализом этих

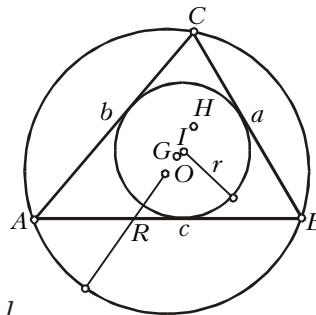


Рис. 1

уравнений, сделаем несколько полезных для дальнейшего «заготовок».

Замечательная формула для «замечательных расстояний»

Начнем с формулы, которая позволит нам выражать расстояния между различными «замечательными точками» треугольника ABC через другие его элементы.

Упражнение 2. Докажите, что для любой точки P и произвольных чисел x, y, z

$$\left| x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC} \right|^2 = s \cdot (xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) - (xyc^2 + yza^2 + zxb^2), \quad (1)$$

где $s = x + y + z$ (рис.2).

Как известно из физики, при $s = x + y + z = 1$ точка D , определяемая равенством $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC}$, есть центр масс системы трех масс x, y, z , помещенных в точки A, B, C , и формула (1) дает квадрат расстояния от точки P до D . В частности, при $x = y = z = 1/3$ точка D есть центроид G

треугольника:

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}), \quad (2)$$

а само равенство (1) принимает вид формулы Лейбница

$$PG^2 = (PA^2 + PB^2 + PC^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$$

для квадрата расстояния от произвольной точки P до G .

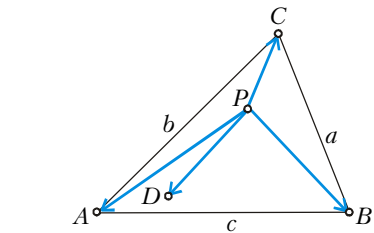


Рис. 2

Если $P = O$ — центр описанной окружности треугольника ABC , то (1) дает

$$OM^2 = s^2 R^2 - (xyc^2 + yza^2 + zxb^2), \quad (3)$$

где $\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

Приведем еще два интересных частных случая формулы (1).

Упражнение 3. Докажите, что а) если точка D лежит на стороне AB треугольника PAB (рис.3) и делит ее в

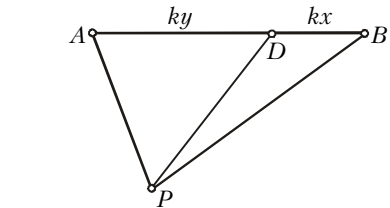


Рис. 3

отношении $AD : DB = y : x$, где $x + y = 1$, то

$$PD^2 = xPA^2 + yPB^2 - xyAB^2$$

(формула Стюарта);

б) расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника можно найти по формуле

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Многочлен треугольника

Один из способов доказать существование треугольника, удовлетворяющего тем или иным условиям, — составить, исходя из этих условий, уравнение

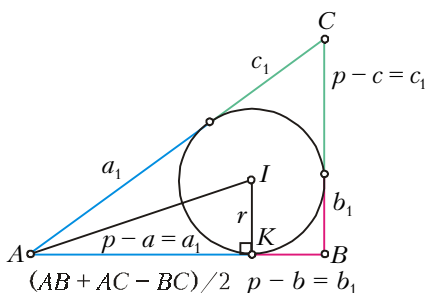


Рис. 4

$F(x) = 0$, корнями которого являются длины a, b, c его сторон, и доказать, что оно имеет три положительных решения, причем эти решения должны удовлетворять «неравенствам треугольника» для сторон ($a < b + c$ и т.д.). Часто удобнее иметь дело не с самими сторонами, а с отрезками, на которые они разбиваются точками касания вписанной окружности. Любые два таких отрезка, выходящих из одной вершины, равны по теореме о касательных; обозначим их a_1 (для отрезков, выходящих из A), b_1 и c_1 (рис.4).

Упражнение 4. Покажите, что а) $a_1 = (b + c - a)/2 = p - a$, $b_1 = p - b$ и $c_1 = p - c$; б) треугольник с заданными величинами a_1, b_1 и c_1 существует (и однозначно определен) при любых положительных значениях этих величин.

Таким образом, перейдя от сторон к отрезкам a_1, b_1, c_1 , мы избавляемся от необходимости заботиться о неравенстве треугольника.

Итак, рассмотрим кубический многочлен $F_1(x)$ с корнями a_1, b_1, c_1 :

$$F_1(x) = (x - a_1)(x - b_1)(x - c_1) = x^3 - (a_1 + b_1 + c_1)x^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)x - a_1b_1c_1.$$

Выразим его коэффициенты через радиусы R, r и периметр $2p$ треугольника. Очевидно, $a_1 + b_1 + c_1 = 3p - (a + b + c) = p$. Пользуясь формулой Герона и формулой $S = rp$ для площади треугольника, вычислим свободный член:

$$a_1b_1c_1 = (p - a)(p - b)(p - c) = S^2/p = r^2p.$$

Наконец, коэффициент при x можно найти, вычислив $F_1(p)$:

$$F_1(p) = (p - a_1)(p - b_1)(p - c_1) = abc = p^3 - p \cdot p^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)p - r^2p.$$

Из формул $S = pr$ и $S = \frac{abc}{4R}$ получаем

$$abc = 4Rrp, \quad (4)$$

откуда

$$a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = r^2 + 4Rr,$$

и «уравнение треугольника» принимает вид

$$F_1(x) = x^3 - px^2 + (r^2 + 4Rr)x - r^2p = 0. \quad (5)$$

Нам нужно найти коэффициенты этого уравнения в нашей задаче и доказать его разрешимость.

Упражнение 5. Проведите аналогичное рассуждение для многочлена $F(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$. Докажите, что $F(x) = x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p)x - 4Rrp$.

В алгебре коэффициенты многочлена $F(x)$ – выражения $a + b + c, ab + bc + ca$ и abc – называют *элементарными симметрическими* (т.е. не меняющимися при перестановке переменных) *многочленами* от трех переменных (a, b и c). Через них можно выразить любой симметрический многочлен от a, b, c . Поэтому любую величину в треугольнике, имеющую геометрический смысл (т.е. одинаковую для равных треугольников, а значит, не меняющуюся при перестановке сторон) и выражаемую многочленом от длин сторон, можно записать через радиусы вписанной и описанной окружностей и периметр. Ниже мы встретимся с несколькими такими выражениями.

Упражнение 6. Для треугольника ABC докажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } a^2 + b^2 + c^2 &= 2p^2 - 8Rr - 2r^2; \\ \text{б) } a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= p^2 - 8Rr - 2r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2; \\ \text{в) } ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a &= 2p(r^2 - 2Rr + p^2). \end{aligned}$$

Условие на центроид

Обратимся непосредственно к треугольнику, который рассматривается в нашей задаче. Выразим с помощью формулы Лейбница расстояние IG от центра I вписанной окружности до центроида G . Расстояние IA найдем из прямоугольного треугольника AIK (см. рис.4), где K – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB . Поскольку $AK = a_1 = p - a$ (см. упражнение 4), то $IA^2 = a_1^2 + r^2$. Аналогично выражаются величины IB^2 и IC^2 . Поэтому (см. упражнение 6)

$$IG^2 = (a_1^2 + r^2 + b_1^2 + r^2 + c_1^2 + r^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9 = (p^2 - 16Rr + 5r^2)/9.$$

Значит, *центроид треугольника лежит на вписанной окружности* ($IG = r$) тогда и только тогда, когда

$$p^2 = 16Rr + 4r^2. \quad (6)$$

Заметим, что при этом условии «уравнение треугольника» (5) упрощается:

$$x^3 - px^2 + (p^2/4)x - r^2p = 0,$$

а после замены $x = pu/2$ становится совсем «хорошим»:

$$u(u - 1)^2 = 8(r/p)^2. \quad (5')$$

Условие на ортоцентр

Мы хотим найти треугольник, в котором и *ортоцентр лежит на вписанной окружности*, т.е. $IH = IG = r$. В задачах, где идет речь одновременно о центроиде и ортоцентре, почти неизбежно на арене появляется еще одна замечательная точка треугольника – центр описанной окружности O . Наша задача – не исключение.

Упражнение 7. Докажите, что в любом треугольнике

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{OH} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}; \\ \text{б) } \vec{OI} &= \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{a + b + c}, \end{aligned}$$

иначе говоря, центр I вписанной окружности есть центр масс системы масс a, b, c , помещенных в вершинах A, B, C соответственно;

$$\begin{aligned} \text{в) } \vec{IH} &= \left(1 - \frac{a}{2p}\right)\vec{OA} + \left(1 - \frac{b}{2p}\right)\vec{OB} + \left(1 - \frac{c}{2p}\right)\vec{OC}. \end{aligned}$$

Упражнение 8. Покажите, что в любом треугольнике

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2. \quad (7)$$

Подставим в равенство (7) $IH = r$, выразим из него p^2 и приравняем это выражение к правой части (6):

$$p^2 = 4R^2 + 4Rr + 2r^2 = 16Rr + 4r^2.$$

Отсюда получаем важное соотношение между радиусами вписанной и описанной окружностей искомого треугольника:

$$r^2 + 6Rr - 2R^2 = 0. \quad (8)$$

Малость, которой хватает

Возьмем для определенности $R = 1$, тогда из последнего уравнения получим $r = \sqrt{11} - 3$ (второй корень уравнения (8) отрицательный), а из предпоследнего – $p^2 = 8(4 - \sqrt{11})$. Подста-

вим величину $8\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{(\sqrt{11}-3)^2}{4-\sqrt{11}} = 2(7-2\sqrt{11})/5$ в «уравнение треугольника» (5'):

$$u(u-1)^2 = 2(7-2\sqrt{11})/5.$$

Нам остается доказать, что это уравнение имеет три положительных корня. На рисунке 5 показан график левой

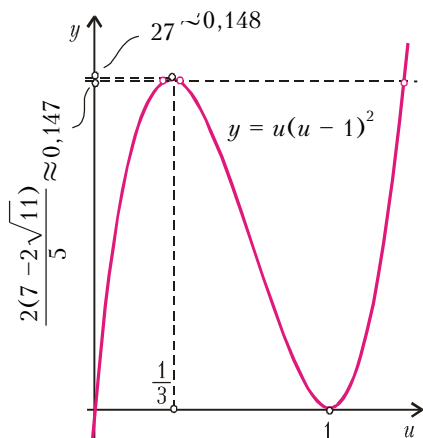


Рис. 5

части этого уравнения. Ее значение в точке $1/3$ (являющееся ее наибольшим значением на отрезке $[0, 1]$, что сейчас для нас не существенно) равно $4/27$ и больше $2(7-2\sqrt{11})/5$ (проверьте!), причем разница между этими величинами едва превышает одну тысячную.

Отсюда, очевидно, следует, что наше «уравнение треугольника» действительно имеет три положительных решения, а значит, искомый треугольник существует. Более того, его стороны, с точностью до пропорциональности, определены однозначно, а значит, все треугольники, удовлетворяющие нашему условию, подобны. Стоит сказать, что циркулем и линейкой этот треугольник не строится.

Геометрия вместо алгебры

Идея приведенного выше вычислительного решения предельно проста: «записать условия в виде уравнений и посчитать», хотя сами вычисления достаточно хитроумны. Но, как это часто бывает, наша задача имеет и более изысканное «геометрическое» решение, использующее несколько классических теорем о треугольнике. С этих теорем мы и начнем изложение второго решения.

Упражнение 9 (прямая Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике центроид G лежит на отрезке OH между центром опи-

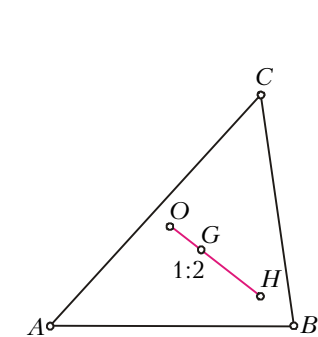


Рис. 6

санной окружности и ортоцентром и делит его в отношении $OG : GH = 1 : 2$ (рис.6). Прямая OH (при $O \neq H$) называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

Упражнение 10 (формула Эйлера). Докажите, что расстояние $d = OI$ между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Таким образом, две окружности могут служить вписанной и описанной окружностями некоторого треугольника лишь в том случае, когда их радиусы связаны с расстоянием между их центрами формулой Эйлера. (В частности, отсюда видно, что в любом треугольнике $R \geq 2r$.)

Верно и обратное. Более того, если расстояние между центрами двух окружностей связано с их радиусами формулой $d^2 = R^2 - 2Rr$, то исходя из любой точки A на окружности радиуса

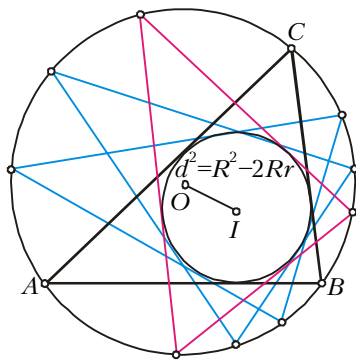


Рис. 7

R можно построить треугольник ABC , вписанный в эту окружность и описанный около второй окружности (рис.7).

Упражнение 11. Докажите последнее утверждение.

Сформулируем теперь одну из самых красивых теорем планиметрии – *теорему Фейербаха*. Она касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника, а также, что является отдельной теоремой, через основания его высот и середины отрезков от ортоцентра до вершин (рис.8; эту ок-

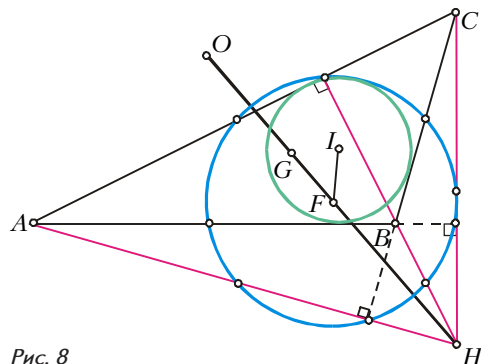


Рис. 8

ружность называют *окружностью девяти точек*). Ее можно представить как образ описанной окружности при гомотетии относительно центроида G с коэффициентом $-1/2$ или относительно ортоцентра с коэффициентом $1/2$. В любом случае получим, что центр F окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точнее, в середине отрезка OH , а ее радиус равен $R/2$. Теорема Фейербаха утверждает, что *окружность девяти точек касается вписанной окружности треугольника и трех его внеписанных окружностей*. В частности, это означает, что $IF = R/2 - r$; именно это равенство нам и понадобится.

Упражнение 12. Докажите, что

$$\vec{IF} = \frac{1}{2p} \left((p-a)\vec{OA} + (p-b)\vec{OB} + (p-c)\vec{OC} \right),$$

и выведите отсюда равенство $IF^2 = (R/2 - r)^2$.

Последнее свойство, которое мы хотим напомнить, хорошо известно:

Упражнение 13. Если на плоскости даны окружность и точка P , то для любой прямой, проходящей через P и пересекающей окружность, произведение $PA \cdot PB$, где A и B – точки пересечения прямой с окружностью, будет одним и тем же; оно равно $|d^2 - R^2|$, где d – расстояние от точки P до центра окружности, а R – радиус окружности.

В учебниках эту теорему обычно формулируют в виде двух утверждений – для точки внутри и вне окружности; величину $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки P относительно данной окружности.

Теперь, наконец, мы можем вплотную заняться нашим треугольником.

Проведем в нем прямую Эйлера OH . Допустим, что точка H уже попала на вписанную окружность, и выведем условие, при котором и точка G окажется на ней (рис.9).

Пусть K – вторая точка пересечения прямой OH с вписанной окружностью.

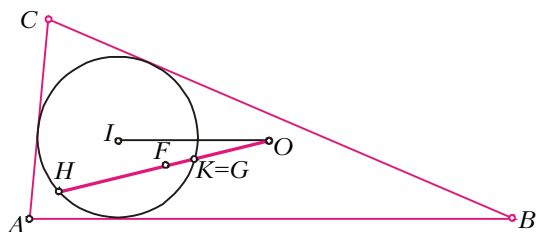


Рис. 9

Обозначим $OH = l$, $OK = kl$, где k – числовой множитель. Тогда степень точки O относительно вписанной окружности равна $OK \cdot OH = kl^2$, а с другой стороны, в силу упражнения 13 и формулы Эйлера, она равна $OI^2 - r^2 = R^2 - 2Rr - r^2$. Аналогично, степень точки F относительно вписанной окружности равна

$$\begin{aligned} FH \cdot FK &= (l/2) \cdot |1/2 - k|l = \\ &= |1 - 2k| \cdot (l/2)^2 = r^2 - IF^2 = \\ &= r^2 - (R/2 - r)^2 = -R^2/4 + Rr. \end{aligned}$$

В искомом треугольнике точка $K = G$ – центроид и $k = 1/3$. Это дает равенство $l^2/3 = R^2 - 2Rr - r^2 = 4(-R^2/4 + Rr)$, из которого сразу получается уже знакомое нам уравнение (8). Обратное,

если радиусы R и r удовлетворяют этому уравнению и известно, что ортоцентр лежит на вписанной окружности, то для множителя k точно таким же способом получим уравнение $k = |2k - 1|$, имеющее два решения: $k = 1/3$ и $k = 1$. В первом случае $OK = (1/3)OH$, т.е. $K = G$ –

центроид G лежит на вписанной окружности.

Упражнение 14. Покажите, что случай $k = 1$ невозможен.

Итак, нарисуем окружности Ω и ω радиусов R и $r = (\sqrt{11} - 3)R$ с центрами в точках O и I на расстоянии $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = R\sqrt{7 - 2\sqrt{11}}$. Как уже было сказано, для любой точки A на окружности Ω можно построить треугольник ABC , вписанный в Ω и описанный около ω . Пусть A пробегает окружность Ω , тогда ортоцентр H треугольника ABC , очевидно, опишет некоторую замкнутую непрерывную линию. Нам достаточно показать, что он побывает и внутри, и снаружи вписанной окружности ω . Тогда его траектория непременно должна пересечь ω , т.е. при некотором положении точки A ортоцентр H треугольника ABC попадает на ω ; выше мы доказали, что в силу заданного соотношения между R и r соответствующий треугольник и будет искомым.

Проведем в окружности Ω диаметр A_1A_2 через I (рис. 10) и рассмотрим равнобедренные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, отвечающие его концам. Треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис. 10, а) тупоугольный, так как O – центр его описанной окружности – лежит вне этого треугольника. (Действительно, достаточно убедиться, что $IO = d > r$, или $d^2 = R^2 - 2Rr > r^2$. После подстановки численных значений это неравенство принимает вид $7 - 2\sqrt{11} > (\sqrt{11} - 3)^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{11} > 13 \Leftrightarrow 176 > 169$.) Следовательно, ортоцентр H_1 этого треугольника лежит вне его – на продолжении радиуса OA_1 , т.е. не только вне ω , но и вне Ω . Второй треугольник, $A_2B_2C_2$, остроугольный (он содержит O), и его ортоцентр H_2 лежит на его высоте A_2M . Установить, что он находится внутри впи-

санной окружности, точнее на ее радиусе IM , можно, сославшись на то, что в любом треугольнике биссектриса любого угла делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из той же вершины, что и биссектриса (на рисунке 10, б, например, $\angle H_2B_2I = \angle IB_2O$); в нашем случае отсюда следует, что точки O и H_2 лежат по разные стороны от I .

Упражнение 15. Докажите выделенное курсивом утверждение о биссектрисе.

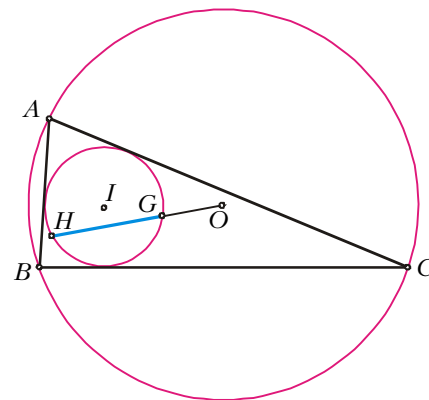


Рис. 11

Этим завершается второе решение нашей задачи. Искомый треугольник изображен на рисунке 11.

Задачи «на закрепление»...

Упражнение 16. Покажите, что каждое из условий а) $2R + r = p$ и б) $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ необходимо и достаточно для того, чтобы треугольник был прямоугольным. В случае остроугольного треугольника знак « $=$ » в обоих соотношениях нужно заменить на « $<$ », а в случае тупоугольного – на « $>$ ».

Упражнение 17 (M1487). Пусть H – точка пересечения высот, O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH , IH , OI наибольший – OH .

...и для исследования

Интересно выяснить, хотя для решения задачи это само по себе и не нужно, какую именно траекторию описывает ортоцентр треугольника ABC , «зажатого» между данными окружностями ω и Ω . Ответ оказывается неожиданно простым – окружность! Для доказательства возьмем на луче OI точку J так, что $OJ = 2OI$ (рис. 12). Тогда IF – средняя линия треугольника OJH , следовательно, $IH = 2IF = R - 2r$. Диаметр этой окружности, очевидно, будет отрезок H_1H_2 , соединяющий ортоцентры рассмотренных выше равнобедрен-

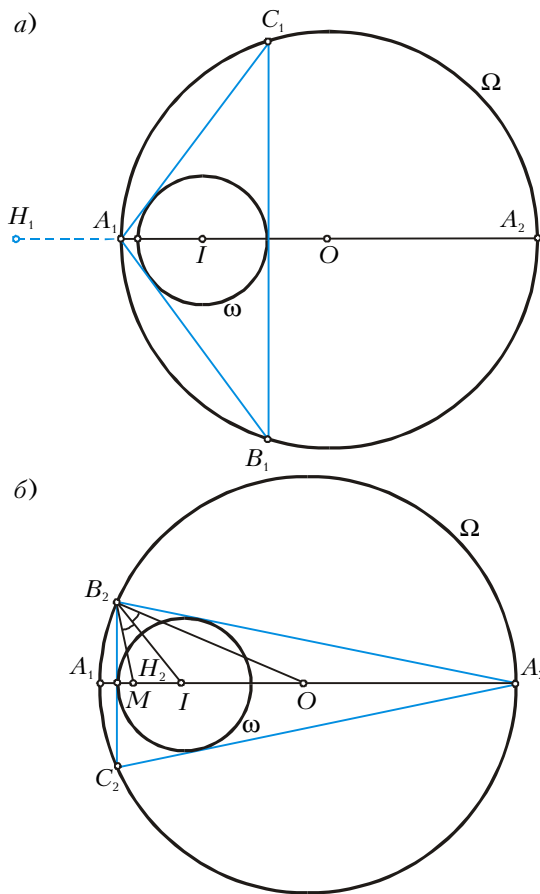


Рис. 10

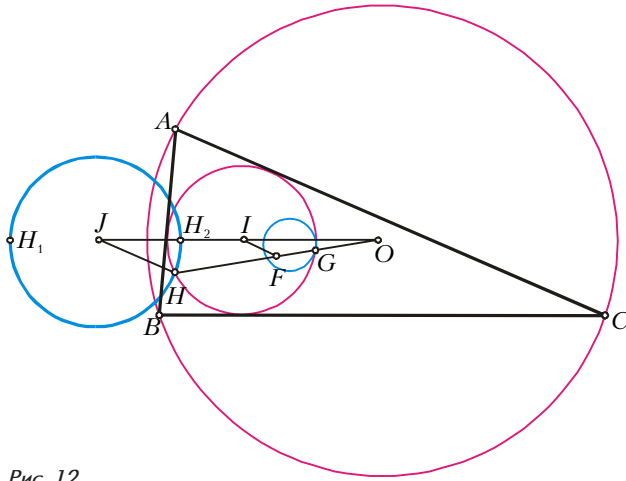


Рис. 12

ных треугольников. Из соображений непрерывности ясно, что когда A пробегает описанную окружность, H пройдет всю указанную окружность, причем за один оборот точки A точка H совершит три полных оборота.

Заметим, что по теореме о прямой Эйлера (упражнение 9) центроид G нашего треугольника также описывает окружность; ее радиус равен $(R - 2r)/3$, а центр делит отрезок IO в отношении 1:2. В связи с этим возникает следующая задача.

Рассмотрим две окружности ω и Ω ,

первая из которых лежит внутри второй. Допустим, что существует *четырёхугольник*, вписанный в Ω и описанный около ω . Можно доказать, что тогда, как и в случае треугольника, такой четырёхугольник можно нарисовать, взяв за одну из его вершин *любую* точку окружности Ω ; это утверждение называется *теоремой Понселе* (для четырёхугольника). **Верно ли, что множество центроидов всех этих четырёхугольников тоже окружность?** (Центроид четырёхугольника — это

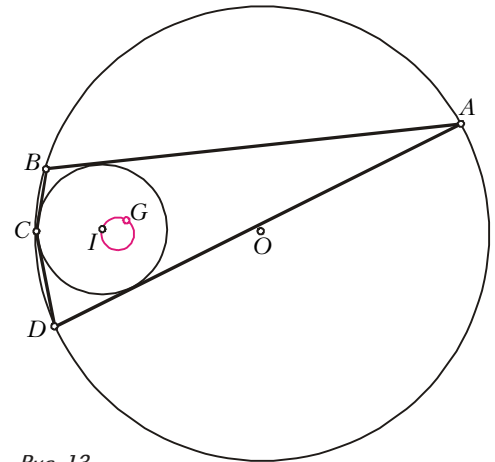


Рис. 13

чек, сосредоточенных в его вершинах; он находится на пересечении средних линий четырёхугольника.) Эксперимент дает утвердительный ответ на этот вопрос (рис.13), но к моменту написания этой статьи доказательством мы не располагали.

Теорема Понселе справедлива и для многоугольников с произвольным числом сторон n . **Будет ли центроид «многоугольника Понселе» описывать окружность при любом n ?**