Осторожно: магнитное поле

А.ЧЕРНОУЦАН

Закон сохранения энергии является, как известно, мощным инструментом решения задач. Он позволяет не выяснять деталей процессов, происходящих при переходе системы из начального состояния в конечное, а непосредственно связывать параметры этих состояний. Закон позволяет также рассчитать работу, которую совершили внешние силы при изменении состояния. Однако неаккуратное применение закона сохранения энергии может привести к неправильным и даже парадоксальным результатам. Напомним известный пример.

Работа внешних сил, затраченная на медленное увеличение расстояния между пластинами плоского конденсатора от d_1 до d_2, равна изменению энергии конденсатора только в том случае, когда пластины отключены от источника:

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1},$$

где $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$ (здесь S – площадь каждой пластины, ε_0 – электрическая постоянная), $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$ ($C_2 < C_1$). Если же попытаться рассчитать таким образом работу для конденсатора, подключенного к источнику тока, она получится отрицательной, что наверняка неправильно – пластины в любом случае притягиваются друг к другу. Выход из положения известен – надо учесть работу сторонних сил источника:

$$A_{\text{вн}} + \mathcal{E}\Delta q = W_2 - W_1,$$

или

$$A_{\text{вн}} + \mathcal{E}(C_2\mathcal{E} - C_1\mathcal{E}) = \frac{C_2\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2},$$

откуда

$$A_{\text{вн}} = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_2\mathcal{E}^2}{2},$$

где $\mathcal{E}$ – электродвижущая сила источника.

С аналогичными или даже более неожиданными ситуациями и «парадоксами» можно встретиться при использовании закона сохранения энергии в применении к магнитному полю. Для наглядности мы сравним поведение во внешнем поле двух простейших систем: плоского конденсатора и соленоида. При расчете энергии собственное поле этих объектов можно считать однородным, что позволит нам использовать формулы для объемной плотности энергии; внешнее поле тоже будем считать однородным. Однако для начала нам надо собрать вместе и обсудить некоторые формулы.

Поле конденсатора и поле соленоида

Напряженность электрического поля плоского конденсатора выражается через поверхностную плотность заряда его пластин:

$$E_{\text{к}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S},$$

а энергия плоского конденсатора – через объемную плотность энергии поля:

$$W = \frac{\varepsilon_0 E_{\text{к}}^2}{2} \cdot Sd = w \cdot V.$$

Таким же образом можно найти энергию в любом объеме, содержащем однородное электрическое поле. Например, если заряженный конденсатор поместить во внешнее однородное поле $\vec{E}$, направленное противоположно собственному полю конденсатора, внутри конденсатора будет заключена энергия

$$W = \frac{\varepsilon_0 \left(E - E_{\text{к}}\right)^2}{2} \cdot Sd.$$

Формулы для магнитного поля выглядят достаточно просто и весьма похоже. Хотя в школьном учебнике эти формулы отсутствуют, их приводят во многих пособиях для классов и школ с углубленным изучением математики и физики. Магнитные формулы, записанные в единицах СИ, содержат *магнитную постоянную* μ_0, связанную с электрической постоянной ε_0 и скоростью света в вакууме c простым соотношением:

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}.$$

Эта постоянная играет в магнитных формулах такую же роль, как электрическая постоянная – в электрических [1].

Магнитная индукция внутри соленоида длиной l с числом витков N, по которому течет ток силой I, равна

$$B_{\text{с}} = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 i,$$

где i – ток, приходящийся на единицу длины соленоида (поверхностная плотность тока). Направление поля определяется по правилу буравчика: вращаем ручку по току, буравчик движется по полю. Объемная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B_{\text{с}}^2}{2\mu_0}.$$

Если поместить соленоид во внешнее магнитное поле $\vec{B}$, направленное параллельно собственному полю, то внутри соленоида будет заключена энергия

$$W = \frac{\left(B + B_{\text{с}}\right)^2}{2\mu_0} \cdot Sl,$$

где S – площадь сечения соленоида.

Для того чтобы иметь возможность вычислить работу по повороту конденсатора и соленоида во внешнем поле, нам надо вспомнить о поведении во внешнем поле простейших объектов – электрического диполя и витка с током.

Электрический диполь и виток с током

Электрическим диполем называется система из двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии d друг от друга. Электрический диполь обладает *дипольным моментом*

$$\vec{p} = q\vec{d},$$

где вектор $\vec{d}$ направлен от отрицательного заряда к положительному (рис.1). На электрический диполь в однородном электрическом поле $\vec{E}$ действует вращательный момент

$$M = qEd\sin\alpha = pE\sin\alpha,$$

[1] *См., например, статью «Эта загадочная магнитная сила» в этом номере журнала. (Прим. ред.)*

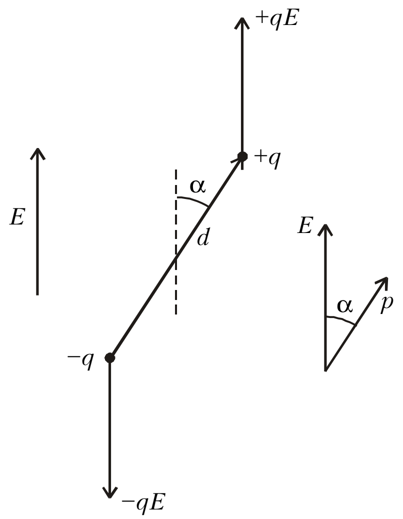

Рис. 1

где α – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$. Поскольку сумма сил, действующих на заряды диполя со стороны поля, равна нулю, вращательный момент имеет одинаковые значения для любой оси (перпендикулярной $\vec{p}$ и $\vec{E}$). При этом у диполя есть только одно устойчивое положение равновесия, при котором дипольный момент параллелен напряженности внешнего поля (противоположное, антипараллельное, положение соответствует неустойчивому равновесию).

Работу силы δA при повороте диполя на малый угол $\delta\alpha$ можно выразить через вращательный момент:

$$\delta A = M\delta\alpha .$$

Тогда для работы поля по повороту диполя на угол α из положения равновесия можно записать

$$A_E = -\int_0^\alpha pE\sin\alpha\cdot d\alpha = -pE(1-\cos\alpha).$$

Эта работа отрицательна, а работа внешних сил при медленном повороте диполя из положения равновесия положительна:

$$A_{\text{вн}} = pE(1-\cos\alpha).$$

Видно, что потенциальная энергия диполя во внешнем поле равна

$$W_{\text{п}} = -pE\cos\alpha .$$

(Можно было начать с вывода формулы для энергии – подумайте, как это сделать,– и из нее получить выражение для работы.) Минимальная энергия ($-pE$) соответствует устойчивому положению равновесия.

Очень похожими свойствами обладает виток с постоянным током, находящийся в однородном магнитном поле. Для простоты рассмотрим виток прямоугольной формы со сторонами a и b и будем поворачивать его относительно оси OO', проходящей через середины противоположных сторон и перпендикулярной магнитному полю $\vec{B}$ (рис.2). Момент сил Ампера, действующих на две стороны контура, которые параллельны оси вращения, равен

$$M = 2IBa\frac{b}{2}\sin\alpha = BIS\sin\alpha ,$$

где α – угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости витка и полем $\vec{B}$. Отметим, что нормаль надо проводить вполне определенным образом – по движению буравчика, ручка которого поворачивается в плоскости витка в направлении протекания тока. Если для характеристики свойств витка ввести

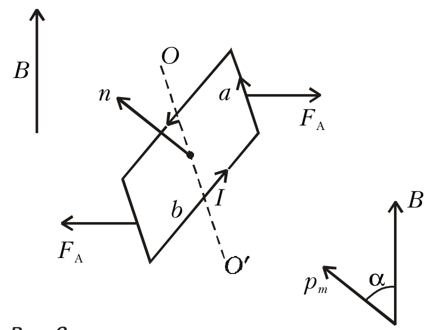

Рис. 2

магнитный момент $\vec{p}_m$, направленный вдоль указанной нормали и равный

$$p_m = IS ,$$

то все свойства витка во внешнем магнитном поле окажутся формально идентичными свойствам электрического диполя во внешнем электрическом поле. Так, у витка есть одно устойчивое положение равновесия, при котором $\vec{p}_m$ параллелен $\vec{B}$, и работа внешних сил при медленном повороте витка из положения равновесия на угол α равна

$$A_{\text{вн}} = p_mB(1-\cos\alpha).$$

Более того, если чисто формально ввести потенциальную функцию (имеющую смысл потенциальной энергии) витка во внешнем поле:

$$W_{\text{п}} = -p_mB\cos\alpha ,$$

то работа внешних сил будет равна $\Delta W_{\text{п}}$.

Интересно отметить, что формальная аналогия между дипольным и магнитным моментами имеет важное значение для описания диэлектрических и магнитных свойств вещества. Поляризация диэлектрика, состоящего из *полярных молекул* (т.е. обладающих собственным дипольным моментом), происходит за счет преимущественной ориентации этих дипольных моментов в направлении поля. Степень ориентации определяется соотношением между выигрышем в энергии, равным pE, и характерной энергией теплового движения, которая равна kT (здесь k – постоянная Больцмана, T температура). Совершенно так же происходит намагничивание *парамагнетиков*, молекулы которых обладают собственным магнитным моментом и стремятся сориентироваться по магнитному полю.

Заметим, что полученные нами выражения годятся и для конденсатора во внешнем поле $\vec{E}$ (в этом случае дипольный момент равен $p = qd$, где q – заряд пластин конденсатора), и для соленоида во внешнем поле $\vec{B}$ (в этом случае $p_m = NIS$).

Поворачивание конденсатора и соленоида

Повернем конденсатор и соленоид на 180° из положения устойчивого равновесия. Рассчитаем работу, которую совершили внешние силы в каждом случае, и сравним ее с соответствующим изменением энергии.

Работа в обоих случаях положительна. Для конденсатора в поле $\vec{E}$ она равна

$$A_{\text{вн}} = 2pE = 2qdE =$$
$$= 2\varepsilon_0E_{\text{к}}SdE = 2\varepsilon_0E_{\text{к}}E\cdot Sd$$

($E_{\text{к}}$ – поле конденсатора), а для соленоида в поле $\vec{B}$ –

$$A_{\text{вн}} = 2p_mB = 2NISB =$$
$$= 2\frac{B_{\text{с}}}{\mu_0}SlB = 2\frac{B_{\text{с}}B}{\mu_0}\cdot Sl$$

($B_{\text{с}}$ – поле соленоида).

Однако с изменением энергии все не так просто. Самое важное различие между конденсатором и соленоидом состоит в том, что в положении устойчивого равновесия поле конденсатора $\vec{E}_{\text{к}}$ направлено *против* внешнего поля $\vec{E}$, а поле соленоида $\vec{B}_{\text{с}}$ направлено *вдоль* внешнего поля $\vec{B}$ (рис.3). При

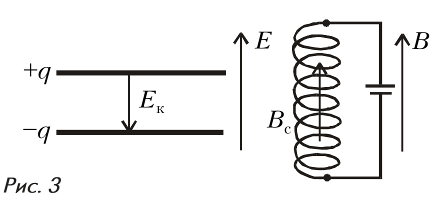

Рис. 3

повороте на 180° изменение энергии электрического поля в конденсаторе положительно:

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0\left(E+E_\text{к}\right)^2}{2}\cdot Sd - \frac{\varepsilon_0\left(E-E_\text{к}\right)^2}{2}\cdot Sd = 2\varepsilon_0 E E_\text{к}\cdot Sd$$

и равно работе внешних сил. Напротив, изменение энергии магнитного поля в соленоиде отрицательно:

$$\Delta W = \frac{\left(B-B_\text{с}\right)^2}{2\mu_0}\cdot Sl - \frac{\left(B+B_\text{с}\right)^2}{2\mu_0}\cdot Sl = -2\frac{BB_\text{с}}{\mu_0}\cdot Sl$$

и равно работе внешних сил только по модулю.

Как же объяснить такое расхождение?

Работа источника. Но это не все ...

Естественное объяснение, возникающее из аналогии с электростатикой, состоит в необходимости учесть работу источника. Продемонстрируем, как это сделать для расчета работы, которую необходимо совершить для поворота на 180° конденсатора, соединенного с источником тока (рис.4). Поскольку полное поле внутри конденсатора до и

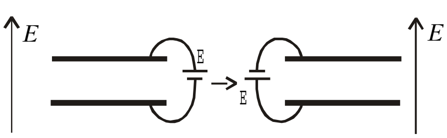

Рис. 4

после поворота равно $\mathcal{E}/d$, энергия поля вообще не изменяется, и закон сохранения энергии принимает вид

$$A_\text{вн} + A_\text{ист} = 0\ .$$

Поле, создаваемое зарядами конденсатора, до поворота равно $\mathcal{E}/d + E$, а после поворота составляет $\mathcal{E}/d - E$; следовательно, заряд на пластине, подключенной к положительному полюсу источника, изменяется на Δq от $\varepsilon_0\left(\mathcal{E}/d + E\right)$ до $\varepsilon_0\left(\mathcal{E}/d - E\right)$. Работа источника при этом отрицательна и равна

$$A_\text{ист} = \mathcal{E}\Delta q = -2\varepsilon_0\mathcal{E}E\ ,$$

а работа внешних сил положительна и равна

$$A_\text{вн} = 2\varepsilon_0\mathcal{E}E\,.$$

Теперь обратимся к соленоиду. Источник, поддерживающий постоянное значение тока I, совершает при повороте соленоида дополнительную работу против сторонних сил, возникающих вследствие явления электромагнитной индукции. При малом изменении магнитного потока работа источника равна

$$\delta A_\text{ист} = \left(-\mathcal{E}_\text{инд}\right)\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}I\Delta t = I\Delta\Phi\ ,$$

а за все время поворота –

$$A_\text{ист} = I\left(\left(B_\text{с}-B\right)SN - \left(B_\text{с}+B\right)SN\right) = -2IBSN = -2\frac{BB_\text{с}}{\mu_0}\cdot Sl.$$

Видно, что работа источника в точности равна по величине, но противоположна по знаку механической работе внешних сил при повороте соленоида. Этому есть простое объяснение. Дело в том, что полная работа сил, действующих на заряды соленоида со стороны постоянного магнитного поля $\vec{B}$, равна нулю (сила Лоренца перпендикулярна скорости и работу не совершает). Магнитное поле совершает при повороте соленоида отрицательную механическую работу и точно такую же по величине положительную работу (в качестве сторонней силы) над зарядами замкнутого контура.

Но как же быть с законом сохранения энергии? Если записать его в виде

$$A_\text{вн} + A_\text{ист} = \Delta W\ ,$$

то получается, что левая часть равна нулю, а правая отлична от нуля и отрицательна.

Чего же мы еще не учли?

Откуда берется внешнее магнитное поле?

Разгадка кроется в следующем. Внешнее поле $\vec{B}$ тоже создается какими-то токами. Можно, например, представить себе, что наш соленоид находится в центре соленоида значительно больших размеров. При повороте нашего соленоида на токи, создающие поле $\vec{B}$, действует ЭДС индукции, и источник, поддерживающий постоянство этих токов, совершает дополнительную работу. В написанном выше законе сохранения энергии $A_\text{ист}$ должна включать в себя как работу источника в нашем поворачивающемся соленоиде, так и работу источника, поддерживающего постоянным внешнее поле $\vec{B}$. Но сразу же возникает резонный (и на первый взгляд безнадежный) вопрос: как можно вычислить работу этого источника, если даже не известна форма токов, создающих внешнее поле?

Ответ на этот вопрос дает очень важная для электродинамики *теорема взаимности*, которую мы сформулируем следующим образом. Рассмотрим два контура с токами I_1 и I_2. При данном расположении контуров магнитный поток, создаваемый в первом контуре магнитным полем, которое создано током второго контура, равен $\Phi_{12} = L_{12}I_2$; обратное соотношение имеет вид $\Phi_{21} = L_{21}I_1$. Введенные коэффициенты, характеризующие влияние контуров друг на друга, называются *коэффициентами взаимной индукции*. Теорема взаимности утверждает, что эти два коэффициента равны друг другу: $L_{12} = L_{21}$.

С помощью этой теоремы мы сможем узнать, как поворот нашего соленоида влияет на внешний контур, создающий поле $\vec{B}$. Пусть ток в этом внешнем контуре равен $\tilde{I}$. Поворот нашего соленоида приводит к изменению потока во внешнем контуре, вызванному изменением коэффициента взаимной индукции: $\Delta\tilde{\Phi} = \Delta L_{21}I$. Источник в этом внешнем контуре совершит работу

$$\tilde{A}_\text{ист} = \tilde{I}\Delta\tilde{\Phi} = \tilde{I}\Delta L_{12}I = I\Delta\Phi = A_\text{ист}\,.$$

Значит, работа источника во внешнем контуре в точности равна работе источника в самом поворачивающемся соленоиде, которая отрицательна и в точности равна изменению энергии магнитного поля.

Согласитесь, что «спасение» закона сохранения энергии потребовало от нас изрядных усилий и привлечения довольно-таки «тяжелой артиллерии»!