Коварные проценты

1. Первоначально арендную плату предлагали увеличить не на 300, как думал автор, а на 200 процентов.

2. Сбор увеличен не на 2, а на 200 процентов (это все равно, что стоимость проезда увеличилась с 1 рубля до 3 рублей). В таких случаях иногда говорят, что сбор увеличился на 2 *процентных пункта.*

3. 400 г.

4. Жирность масла 80% говорит о том, что в 730 тыс. тонн масла содержится $730\times0{,}8$ тыс. тонн жира. Если это количество жира перераспределить в $730\cdot1{,}5$ тыс. тонн масла, то последнее будет иметь жирность $\frac{0{,}8}{1{,}5}\cdot100\%\approx53\%$, что не соответствует действительности.

5. Если жирность добавляемых n килограммов молока $p\%$, то должно выполняться соотношение $82\cdot1000+np=72{,}5\cdot1100$, что невозможно ни при каком n, даже для обезжиренного ($p=0$) молока. Значит, слишком скромно (100 кг) оценен «коммерческий навар». Обозначив его через x(кг), получим соотношение $82\cdot1000+np=72{,}5\cdot(1000+x)$, откуда следует, что $x>131$ (кг).

Ловушка для треугольника

1. Наименьший угол треугольника равен

$$\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt6}-\frac{1}{\sqrt2}\right)-\frac{\pi}{4}.$$

2. *Указание.* Умножьте скалярно вектор в левой части на себя и воспользуйтесь тождеством

$$2\vec v\cdot\vec u=\vec v^{\,2}+\vec u^{\,2}-\left(\vec v-\vec u\right)^2.$$

3. а) К вектору $\vec{PD}=x\vec{PA}+y\vec{PB}$ примените формулу (1) из статьи с $z=0$.

б) Используйте результат упражнения 7,а) и формулу (3).

4. Оба утверждения следуют из соотношений $a_1+b_1=c$, $b_1+c_1=a$, $c_1+a_1=b$.

6. а) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$, вторая скобка выражается с помощью упражнения 5; б) аналогично а); в) добавляя к левой части $3abc=12Rrp$, получим $(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

7. а) *Указание.* Пусть $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OH'}$; проверьте, что отрезки AH' и BH' перпендикулярны сторонам BC и CA соответственно, т.е. $\vec{AH'}\cdot\vec{BC}=\vec{BH'}\cdot\vec{CA}=0$.

б) *Указание.* Используйте теорему об отношении, в котором биссектриса треугольника делит сторону.

в) следует из а) и б).

8. Из упражнения 7,в) и формулы (3) следует, что $IH^2=4R^2-\left[(1-a/2p)(1-b/2p)c^2+\ldots\right]$. Вычитаемое после раскрытия скобок приводится к виду

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a\right)\Big/2p+abc/2p$$

и преобразуется с помощью формул из упражнения 6.

9. *Указание.* Сравните формулу (2) и упражнение 7,а).

10. *Указание.* Используйте упражнение 7,б) и формулы (3) и (4).

11. Во-первых, заметим, что $d+r<R$, т.е. меньшая окружность ω лежит внутри большей окружности Ω. Пусть касательные к ω, проведенные из точки A, произвольно взятой на Ω, пересекают Ω в точках B и C (рис.8). Будем изменять радиус окружности ω, не меняя ее центра. Ясно, что если он достаточно мал, то соответствующая этой маленькой окружности ω_1 хорда B_1C_1 будет лежать вне ω_1, а окружность ω_2, «почти касающаяся» Ω, будет пересекать соответствующую ей хорду B_2C_2. Поэтому найдется промежуточная окружность ω_0 радиуса r_0, которая касается соответствующей ей

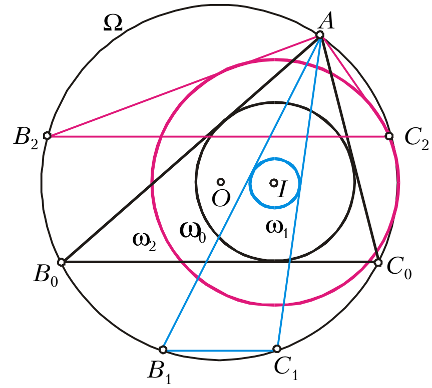

Рис. 8

хорды. По формуле Эйлера, $R^2-2Rr_0=d^2=R^2-2Rr$. Следовательно, ω_0 совпадает с ω.

12. Векторное равенство следует из того, что $\vec{OF}=\frac12\vec{OH}$, и из формул упражнения 7. Применяя к нему (3), получим $4p^2\cdot IF^2=p^2R^2-\left(a_1b_1c^2+b_1c_1a^2+c_1a_1b^2\right)$, где, согласно нашим обозначениям, $a_1=p-a$ и т.д.; выражение в скобках с учетом приведенных в статье формул для симметрических многочленов от a_1, b_1 и c_1 можно преобразовать так:

$$a_1b_1c^2+\ldots=\left(a_1b_1\left(c^2-p^2\right)+a_1b_1p^2\right)+\ldots=$$

$$=-a_1b_1c_1(c+p+b+p+a+p)+p^2\left(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1\right)=$$

$$=-5pa_1b_1c_1+p^2\left(r^2+4rR\right)=p^2\left(-5r^2+r^2+4rR\right),$$

откуда $4IF^2=R^2-4rR+4r^2=(R-2r)^2$.

13. Проведем из P прямую через центр O данной окружности. Пусть она пересекает окружность в точках A_1 и B_1

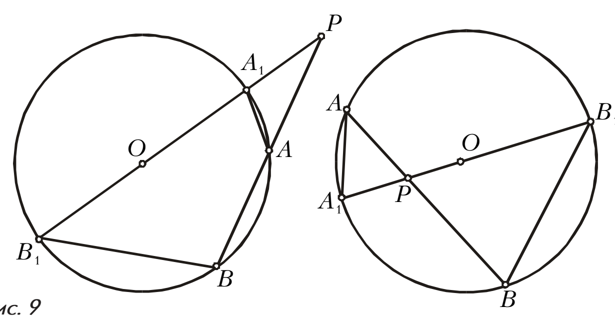

Рис. 9

(рис.9). Из теоремы о вписанном угле следует, что треугольники PAA_1 и PB_1B подобны, поэтому $PA\cdot PB=PA_1\cdot PB_1=|d-R|\cdot(d+R)$.

14. При $k=1$ прямая Эйлера должна касаться вписанной окружности в точке H. Но если выполнено уравнение (8), то центр F окружности 9 точек попадает внутрь вписанной окружности (легко проверить, что $IF=R/2-r<r$ при $r=\left(\sqrt{11}-3\right)R$) и, стало быть, прямая Эйлера пересекается с ней. Можно и не ссылаться на уравнение (8), а прямо из условий $IH=r$ и $OH^2+IH^2=OI^2$ вывести равенство $r=2R$.

15. *Указание*. Покажите, что угол между прямыми AH и AB равен углу между прямыми AO и AC (оба угла равны $|\pi/2-\angle ABC|$).

16. Из формулы упражнения 6,а) следует, что $8R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=2(2R+r)^2-2p^2$. В то же время $8R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=OH^2-R^2$ (см. упражнение 3,б)). Орто-