Действительно,

$$b_1+b_3-b_2-b_4=\left(b_1-b_2\right)+\left(b_3-b_4\right)\geq 0,$$

левое неравенство доказано. Справедливо и правое неравенство:

$$b_1+b_3-b_2-b_4=\left(b_1-b_2\right)+\left(b_3-b_4\right)\leq$$

$$\leq\left(b_1-b_2\right)+\left(b_2-b_3\right)+\left(b_3-b_4\right)=b_1-b_4\leq b_1\leq 9.$$

2. Синеглазка задумала число 1981. Поскольку разность между произвольным натуральным числом и суммой его цифр кратна 3, а число 2000 на 3 не делится, то Незнайка, очевидно, ошибся.

3. Разобьем упомянутые 6 расстояний на 3 пары, где в состав каждой пары входит расстояние от искомой точки до одной из трех вершин и от искомой точки до противоположной стороны. Заметим, что сумма этих двух значений не меньше высоты, опущенной из вершины на сторону, причем равенство достигается только если искомая точка лежит на высоте. Таким образом, сумма всех указанных в условии расстояний не меньше суммы высот данного треугольника, причем равенство достигается только в случае, когда искомая точка принадлежит каждой из трех высот, т.е. является точкой пересечения высот. Для остроугольного треугольника она как раз находится внутри треугольника.

4. ТЕТИВА = 141376.

5. Разность масс девяти железных гирек и девяти бронзовых гирек может равняться 90 г лишь в одном случае, когда девять более легких из них имеют массы 1 г, 2 г, …, 9 г, а девять более тяжелых – массы 11 г, 12 г, …, 19 г. Следовательно, масса золотой гирьки 10 г.

Конкурс «Математика 6—8»

Задачи

(см. «Квант» №6 за 1998 год)

11. Искомое число должно одновременно делиться на 9 и на 11. Согласно признаку делимости на 9, сумма S цифр искомого числа должна делиться на 9, а поскольку все его цифры четные, то и на 18. Обозначим $S = 18z$, где z – некоторое натуральное число. Применим признак делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи этого числа, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11. Обозначим сумму цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи искомого числа, через $2x$, а сумму цифр, стоящих на нечетных местах, – через $2x + 22y$ (все цифры искомого числа – четные!), где x, y – целые неотрицательные числа, причем $x + y > 0$. Имеем равенство $2x + 2x + 22y = 18z$, или $2x + 11y = 9z$. Отсюда $z = \dfrac{2x+11y}{9} = y + \dfrac{2(x+y)}{9}$ может быть целым числом лишь когда $2(x + y) = 9u$, где u – целое. Отсюда $x + y = 9t$; $u = 2t$, где t – некоторое целое, причем, учитывая ограничение $x + y > 0$, заключаем, что число t может быть только натуральным.

Следовательно, $z = y + \dfrac{2\cdot 9t}{9} = y + 2t$. Поскольку t – натуральное число, а y – целое неотрицательное, то область возможных значений z находится среди множества чисел 2, 3, 4, 5, 6,… Соответственно, сумма цифр $S = 18z$ в искомом числе принадлежит множеству чисел 36, 54, 72, …

Построим требуемое число с суммой цифр 36. Полусумму – число 18 – можно представить тремя различными способами в виде суммы наименьшего количества четных слагаемых: 18 = 6 + 6 + 6 = 4 + 6 + 8 = 2 + 8 + 8. Наименьшее шестизначное число, которое можно построить из этих цифр, – 228888.

Для построения числа с суммой цифр 54 и более потребуется не менее шести четных цифр, что заведомо даст число, превышающее 228888. Таким образом, искомое число – 228888.

12. Первый кондуктор может продать все 175 билетов. Для этого ему достаточно действовать так, чтобы после его ухода не было пассажиров, к которым подходили два раза (тогда второй кондуктор не сможет продать ни одного билета). Ясно, что после первого хода это условие выполняется. Предположим, что оно выполняется после очередного хода первого кондуктора, и покажем, что он может обеспечить его выполнение и после следующего своего хода. Если второй кондуктор подходит к какому-то пассажиру, к которому уже подходили, то первый может подойти к тому же пассажиру (в третий раз) и продать ему билет.

Если же второй подходит к пассажиру, к которому еще не подходили, то первый может найти еще одного пассажира, к которому ни разу не подходили. Действительно, если после хода второго таких пассажиров не осталось, то к каждому подходили один или три раза, а так как пассажиров нечетное число, то общее количество подходов кондукторов к пассажирам нечетно. Но это количество должно быть четным, так как первый и второй кондукторы сделали поровну ходов.

13. Каждым ходом конь сдвигается на 2 клетки в одном направлении и на 1 клетку в другом. Значит, за 8 ходов сумма сдвигов коня равна 8 · 3 = 24. Если конь побывал на всех горизонталях, то он прошел с самой нижней до верхней и спустился назад. Значит, сумма сдвигов по вертикали не меньше 7 + 7 = 14. Аналогично, сумма горизонтальных сдвигов не меньше 14. Поскольку 14 + 14 > 24, конь не мог за 8 ходов побывать на всех горизонталях и вертикалях и вернуться на исходное поле.

14. На стороне BC построим точку M такую, что $B_1M\parallel AB$, на стороне AB построим точку C_1 такую, что $MC_1\parallel AC$, на стороне AC построим точку N такую, что $C_1N\parallel BC$ и на стороне BC построим точку A_1 такую, что $NA_1\parallel AB$ (рис.7). Докажем, что площади треугольников AC_1B_1, BA_1C_1 и CB_1A_1 равны. Площади параллелограммов AC_1MB_1 и BA_1NC_1 равны, так как каждый из них равновелик параллелограмму C_1MCN.

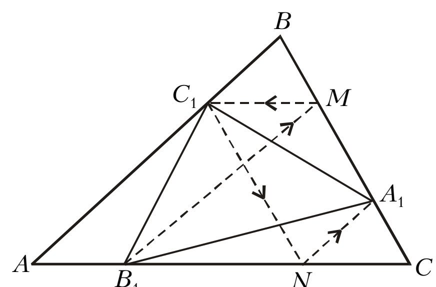

Рис. 7

Значит, треугольники AC_1B_1 и BA_1C_1, занимая половину площадей равновеликих параллелограммов AC_1MB_1 и BA_1NC_1, равновелики. Аналогично проверяется равновеликость других пар треугольников.

15. Назовем точки, разбивающие окружность на дуги, узловыми и отнесем их к тем дугам, которые расположены по отношению к ним по часовой стрелке. Замечаем, что если блоха хотя бы раз попадет в такую точку, то все ее дальнейшие прыжки будут происходить в соседние узловые точки, и, таким образом, блоха побывает на всех дугах.

Предположим, в начальный момент блоха находится внутри некоторой дуги l. Если после кругового путешествия блоха попадет в исходную точку старта, то она непременно побывает на всех дугах. Если же этого не произойдет – какие-то дуги окажутся перепрыгнутыми, – то, попав на дугу l, блоха сместится в сторону узловой точки этой дуги, причем смещение будет равно сумме длин перепрыгнутых дуг. Далее, стартуя уже из этой новой точки, блоха после завершения кругового маршрута либо побывает на всех дугах, либо опять сместится к узловой точке дуги l (возможно, уже на другую величину). Не более чем за n круговых маршрутов, где n – количество дуг, блоха либо побывает на всех дугах, не посетив при этом ни одной узловой точки, либо окажется в узловой точке дуги l, и в дальнейшем уже не минует ни одной дуги, прыгая по узловым точкам.