вим величину $8\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{11}-3\right)^2}{4-\sqrt{11}} =$ $= 2\left(7-2\sqrt{11}\right)/5$ в «уравнение треугольника» (5′):

$$u(u-1)^2 = 2\left(7-2\sqrt{11}\right)/5.$$

Нам остается доказать, что это уравнение имеет три положительных корня. На рисунке 5 показан график левой

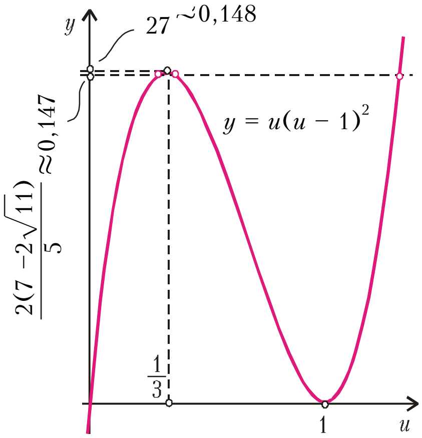

Рис. 5

части этого уравнения. Ее значение в точке $1/3$ (являющееся ее наибольшим значением на отрезке $[0, 1]$, что сейчас для нас не существенно) равно $4/27$ и больше $2\left(7-2\sqrt{11}\right)/5$ (проверьте!), причем разница между этими величинами едва превышает одну тысячную.

Отсюда, очевидно, следует, что наше «уравнение треугольника» действительно имеет три положительных решения, а значит, искомый треугольник существует. Более того, его стороны, с точностью до пропорциональности, определены однозначно, а значит, все треугольники, удовлетворяющие нашему условию, подобны. Стоит сказать, что циркулем и линейкой этот треугольник не строится.

Геометрия вместо алгебры

Идея приведенного выше вычислительного решения предельно проста: «записать условия в виде уравнений и посчитать», хотя сами вычисления достаточно хитроумны. Но, как это часто бывает, наша задача имеет и более изысканное «геометрическое» решение, использующее несколько классических теорем о треугольнике. С этих теорем мы и начнем изложение второго решения.

Упражнение 9 (прямая Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике центроид G лежит на отрезке OH между центром описанной окружности и ортоцентром и делит его в отношении $OG : GH = 1 : 2$ (рис.6). Прямая OH (при $O \neq H$) называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

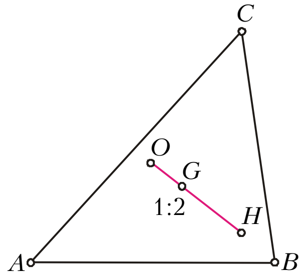

Рис. 6

Упражнение 10 (формула Эйлера). Докажите, что расстояние $d = OI$ между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Таким образом, две окружности могут служить вписанной и описанной окружностями некоторого треугольника лишь в том случае, когда их радиусы связаны с расстоянием между их центрами формулой Эйлера. (В частности, отсюда видно, что в любом треугольнике $R \geq 2r$.)

Верно и обратное. Более того, если расстояние между центрами двух окружностей связано с их радиусами формулой $d^2 = R^2 - 2Rr$, то исходя из любой точки A на окружности радиуса R можно построить треугольник ABC, вписанный в эту окружность и описанный около второй окружности (рис.7).

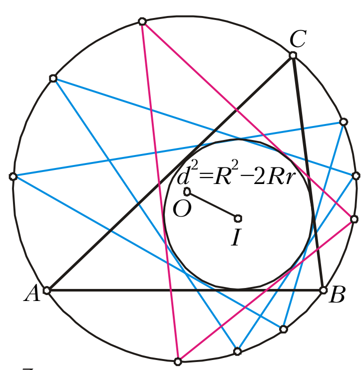

Рис. 7

Упражнение 11. Докажите последнее утверждение.

Сформулируем теперь одну из самых красивых теорем планиметрии – *теорему Фейербаха.* Она касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника, а также, что является отдельной теоремой, через основания его высот и середины отрезков от ортоцентра до вершин (рис.8; эту окружность называют *окружностью девяти точек*). Ее можно представить как образ описанной окружности при гомотетии относительно центроида G с коэффициентом $-1/2$ или относительно ортоцентра с коэффициентом $1/2$. В любом случае получим, что центр F окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точнее, в середине отрезка OH, а ее радиус равен $R/2$. Теорема Фейербаха утверждает, что *окружность 9 точек касается вписанной окружности треугольника и трех его вневписанных окружностей*. В частности, это означает, что $IF = R/2 - r$; именно это равенство нам и понадобится.

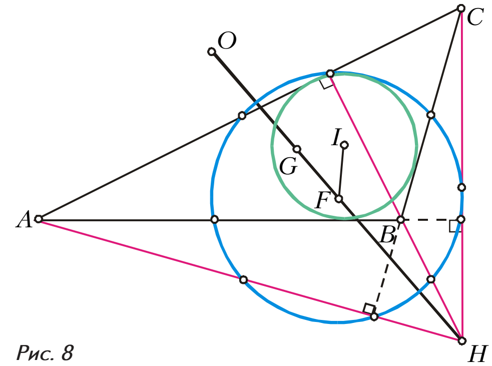

Рис. 8

Упражнение 12. Докажите, что

$$\vec{IF} = \frac{1}{2p}\Big((p-a)\vec{OA} + (p-b)\vec{OB} + (p-c)\vec{OC}\Big),$$

и выведите отсюда равенство $IF^2 = (R/2 - r)^2$.

Последнее свойство, которое мы хотим напомнить, хорошо известно:

Упражнение 13. Если на плоскости даны окружность и точка P, то для любой прямой, проходящей через P и пересекающей окружность, произведение $PA \cdot PB$, где A и B – точки пересечения прямой с окружностью, будет одним и тем же; оно равно $\left|d^2 - R^2\right|$, где d – расстояние от точки P до центра окружности, а R – радиус окружности.

В учебниках эту теорему обычно формулируют в виде двух утверждений – для точки внутри и вне окружности; величину $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки P относительно данной окружности.

Теперь, наконец, мы можем вплотную заняться нашим треугольником.

Проведем в нем прямую Эйлера OH. Допустим, что точка H уже попала на вписанную окружность, и выведем условие, при котором и точка G окажется на ней (рис.9).

Пусть K – вторая точка пересечения прямой OH с вписанной окружностью.