значение он принимает не более чем в r точках; поэтому $\left|P\left(k^i\right)\right| \le 1$ не более чем при $3r$ значениях i.

Будем рассматривать ниже вместо k число $k_1 = k^m$. Рассмотрим какой-либо простой делитель p числа $\left|P(k_1)\right|$. Если k_1 делится на p (а значит, и свободный член многочлена $P(x)$ делится на p) – все ясно: в этом случае $P\left(k_1^j\right)$ делится на p при любом натуральном j.

Пусть k_1 не делится на p. В этом случае из принципа Дирихле следует, что среди чисел k_1^2, k_1^3, … найдется такое k_1^j, что $k_1^j \equiv k_1 \pmod p$. Следовательно, $P\left(k_1^j\right) \equiv P(k_1) \pmod p$, т.е. p делит и $P(k_1)$, и $P\left(k_1^j\right)$.

Замечание. Если взять вместо k^n более «разреженную» последовательность k^{2^n}, то ответ задачи сменится на противоположный: достаточно положить $P(x) = x + 1$, $k = 2$. Легко показать, что при $n \ne m$ числа $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$ взаимно просты. Такие числа называются *числами Ферма.* Нетрудно доказать и более сильное утверждение: при любом фиксированном натуральном t *обобщенные числа Ферма* $(2t)^{2^n} + 1$ тоже взаимно просты. Таким образом, при построении примера можно брать $k = 2t$, где t – произвольное фиксированное натуральное число.

А.Пастор

М1665. *а) В сферу вписано несколько кубов. Каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все кубы имеют общую вершину.*

б) Четыре куба расположены в пространстве так, что каждые три из них имеют общую вершину. Обязательно ли все четыре имеют общую вершину?*

а) В сферу вписаны кубы K_1, K_2, K_n $(n > 3)$. Заметим сначала, что если два куба вписаны в сферу и имеют общую вершину, то они имеют общую диагональ, которая является диаметром сферы. При этом, если два куба имеют две общие диагонали, то они совпадают.

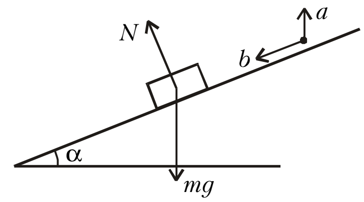
По условию задачи кубы K_1, K_2 и K_3 имеют общую вершину, а значит, они имеют общую диагональ d_1 с одним из концов в этой вершине. Кубы K_2, K_3 и K_4 тоже имеют общую диагональ d_2. Если диагонали d_1 и d_2 совпали, то все четыре куба имеют одну общую диагональ (а значит, две общие вершины). Если же d_1 и d_2 не совпали, то кубы K_2 и K_3 имеют две общие диагонали d_1 и d_2, а значит, кубы K_2 и K_3 совпадают, и тогда по условию кубы K_1, K_2, K_3 и K_4 имеют общую вершину. Приведенное рассуждение можно считать первым шагом индукции, но заключительный переход от n к $n + 1$ проводится точно так же.

б) Возьмем вспомогательный куб и впишем в него вспомогательный правильный тетраэдр с вершинами в вершинах куба. Четыре нужных нам куба получаются, когда мы симметрично отразим вспомогательный куб относительно каждой из четырех граней вспомогательного тетраэдра. Каждые три из этих кубов имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

В.Произволов

Ф1673. *На гладком клине с углом α при основании находится небольшое тело. С каким вертикальным ускорением нужно двигать клин, чтобы тело оставалось на одной и той же высоте?*

На рисунке показаны силы, действующие на тело при движении, и разложенное на составляющие ускорение тела. А именно: ускорение представлено в виде векторной суммы вертикального ускорения $\vec{a}$, с которым тело движется вместе с клином, и ускорения $\vec{b}$ вдоль клина.



Полное ускорение тела вдоль вертикального направления равно нулю:

$$b \sin\alpha - a = 0.$$

Для сил в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления можно записать

$$N\cos\alpha - mg = 0, \quad N\sin\alpha = mb\cos\alpha.$$

После простых преобразований получаем

$$a = g\,\mathrm{tg}^2\alpha.$$

А.Клинов

Ф1674. *В системе, изображенной на рисунке 1, ускорения блоков направлены по вертикали, куски нитей также вертикальны. С какими силами приходится при этом действовать на блоки? Массы блоков и нитей пренебрежимо малы, нити нерастяжимы.*

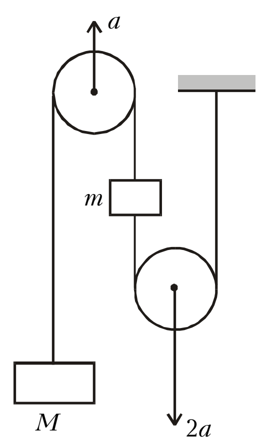


Рис. 1

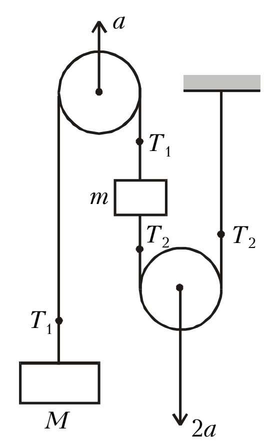


Рис. 2

По условию задачи ускорение груза массой m направлено вниз и равно $4a$. Тогда (рис.2)

$$mg + T_2 - T_1 = 4ma.$$

Ускорение груза массой M при этом направлено вверх и равно $6a$. Для него

$$T_1 - Mg = 6Ma.$$

Из этих уравнений находятся силы T_1 и T_2. На верхний блок нужно действовать силой

$$F_1 = 2T_1 = 2M(g + 6a),$$

а к нижнему блоку нужно прикладывать силу

$$F_2 = 2T_2 = 2\big(M(g + 6a) + m(4a - g)\big).$$

М.Учителев

Ф1675. *Для съемок очередного фильма Спилберга был изготовлен макет Земли – в натуральную величину и с той же массой (внутри большого очень легкого пласт-*