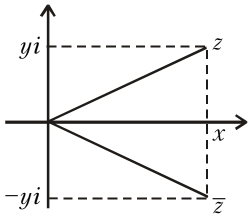

Рис. 2

с $z = x + yi$, обозначают $\overline{z} = x - yi$ (рис.2). Геометрический смысл перехода от числа к сопряженному – симметрия относительно оси абсцисс. Легко проверить тождества

$$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v},\ \overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v},$$

которые как раз и позволяют заменять в формулах все числа на сопряженные.

Между прочим, $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z\overline{z}$. Это позволяет очень изящно доказать теорему 5:

$$|uv|^2 = (uv)\overline{uv} = uv\overline{u}\overline{v} = (u\overline{u})(v\overline{v}) = |u|^2 \cdot |v|^2.$$

Формула (1) не потребовалась! Точнее, формула (1) – это по сути и есть формула $|uv|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2$.

Целые гауссовы числа

Определения

Комплексное число $a + bi$ называют *целым гауссовым*, если a и b – целые числа. Сумма, разность и произведение целых гауссовых чисел – целые гауссовы числа, так что множество $\boldsymbol{Z}[i]$ целых гауссовых чисел является, как говорят алгебраисты, кольцом.

Определение. *Целое гауссово число и кратно целому гауссову числу v, если существует такое целое гауссово число w, что $u = vw$.*

Отметив на плоскости целые гауссовы числа, мы получим решетку (рис.3). Интересно, что числа, кратные данному числу z, тоже образуют решетку (рис.4).

На рисунке 5 синим цветом выделены кратные числа $2+i$, а красным — кратные числа $2-i$. Давайте спросим себя, какие целые гауссовы числа являются кратными и числа $2+i$, и числа $2-i$ одновременно. Ответ очевиден: пересечение множеств «синих» и «красных» чисел состоит из чисел, кратных 5. Другими словами, наименьшее общее кратное чисел $2+i$ и $2-i$ равно 5.

Произведение $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ комплексного числа $z = a + bi$ и сопряженного с ним числа $\overline{z} = a - bi$ является числом вещественным. Поэтому для любого ненулевого целого гауссова числа z существует кратное ему натуральное число $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Теорема 6. *Если числа a и b взаимно просты, то наименьшим натуральным числом n, которое кратно числу $a + bi$, является именно число $a^2 + b^2$.*

Доказательство. Поскольку

$$\frac{n}{a+bi} = \frac{n(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{na}{a^2+b^2} - \frac{nb}{a^2+b^2}i,$$

натуральное число n кратно числу $a + bi$ только в тех случаях, когда числа na и nb кратны $a^2 + b^2$. Поскольку числа a и b взаимно просты, это бывает только когда n кратно $a^2 + b^2$.

Упражнения

25. При каком условии на целые числа a и b частное $(a+bi)/(1+i)$ является целым гауссовым числом?

26. Изобразите на плоскости числа, кратные числу а) $1+3i$; б) $1-3i$. в) Какие целые гауссовы числа являются кратными и числа $1+3i$, и числа $1-3i$ одновременно?

27. Докажите, что если целое вещественное число n кратно ненулевому целому гауссову числу $a + bi$, то n кратно числу $(a^2+b^2)/\text{НОД}(a, b)$.

Делители единицы

Очевидно,

$$1 = 1 \cdot 1 = i \cdot (-i) = (-1) \cdot (-1) = (-i) \cdot i.$$

Других способов разложить 1 в произведение двух целых гауссовых чисел нет:

Теорема 7. *В $\boldsymbol{Z}[i]$ нет делителей единицы, кроме чисел 1, i, −1 и $-i$. (Другими словами, целое гауссово число $a + bi$ является делителем единицы в том и только том случае, когда $a^2 + b^2 = 1$.)*

Доказательство. Если $1 = uv$, где $u, v \in \boldsymbol{Z}[i]$, то $1 = |u| \cdot |v|$. Поскольку модуль ненулевого целого гауссова числа не меньше 1, имеем $|u| = |v| = 1$, откуда и следует утверждение теоремы.

Ассоциированные числа

Числа u и v называют *ассоциированными*, если они кратны друг другу, т.е. u кратно v и v кратно u. Всякое целое гауссово число z можно представить в виде произведения

$$z = 1 \cdot z = i(-iz) = (-1)(-z) = (-i)(iz),$$

первый множитель которого – делитель единицы, а второй – ассоциирован с числом z. Столь же очевидно, что если целое гауссово число w кратно числу z, то делителями числа w являются также и числа $-z$, iz, $-iz$. Поэтому, рассматривая разложения на множители, можно «не различать» ассоциированные числа.

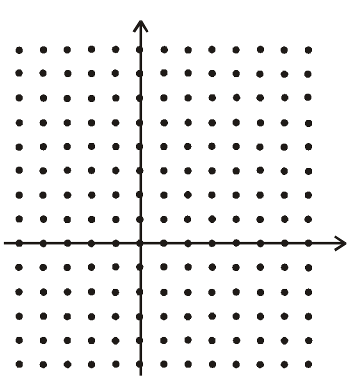

Рис. 3

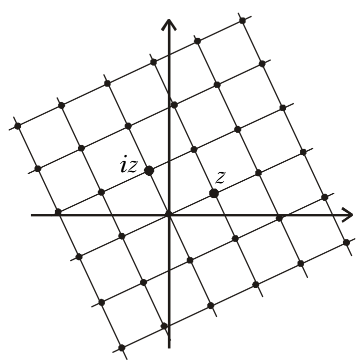

Рис. 4

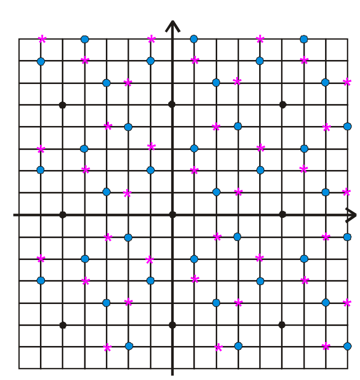

Рис. 5