20 июля 1996 года в 9 часов утра на южном побережье Крыма в районе Алушты было спокойно – полный штиль. Но о берег с завидной регулярностью бились волны. Период ударов не составляло труда измерить – он оказался равным 5,0 с. 21 июля в тот же час и в том же месте по-прежнему был штиль, но по-прежнему на море было волнение. Однако период ударов волн был уже другой – 3,3 с. Надо определить, когда и на каком расстоянии от берега разыгрался шторм.

Выберем в качестве рабочей модели следующую. В некоторой области Черного моря в некоторый неизвестный пока момент времени разразился шторм. Шторм – это ветер, шум, брызги и, конечно, рождение волн. Волны разбегаются в разные стороны и через некоторое время достигают берега. Вот почему даже в штиль море может быть неспокойным.

Теперь проведем расчет. Поместим начало координат в эпицентр шторма (рис.4). Тогда в точку с координатой x к моменту времени t придет группа волн, у которых групповая скорость равна x/t:

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{2} v_{\text{ф}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{x}{t}.$$

Отсюда легко определить волновой вектор и период пришедших волн:

$$k = \frac{gt^2}{4x^2},$$

$$T = \frac{\lambda}{v_{\text{ф}}} = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{k}{g}} = \frac{4\pi x}{gt}.$$

Видно, что период пришедших волн уменьшается с течением времени (рис.5,*а*). Это легко объяснить. Длинные волны имеют большую скорость, поэтому приходят раньше. Но у них и период больший:

$$T = \frac{\lambda}{v_{\text{ф}}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

Для вычисления расстояния до эпицентра и времени начала шторма удобно построить график зависимости частоты $\nu = 1/T$ приходящих волн от времени (рис.5,*б*). С его помощью, используя данные нашей задачи, легко получить

$$t = \Delta t \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = \Delta t \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 24\text{ ч}\,\frac{3{,}3\text{ с}}{5\text{ с} - 3{,}3\text{ с}} \approx 47\text{ ч},$$

$$x = \frac{g}{4\pi}\frac{\Delta t}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{g}{4\pi}\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}\Delta t \approx 650\text{ км}.$$

Итак, шторм разразился в 650 км от берега утром 18 июля 1996 года.

Глядя на эти цифры, невольно задумываешься: а реально ли, что волны проходят по морю такой громадный путь и не затухают за счет вязкого трения? Оказывается, вполне реально. Убедиться в этом можно, оценив по размерности время затухания волн за счет вязкости. Попробуйте сделать это самостоятельно, а мы возьмем из справочника готовую формулу, которая отличается от полученной по размерности лишь постоянным множителем:

$$t = \frac{\lambda^2\rho}{8\pi^2\eta}$$

(здесь $\eta = 10^{-3}$ кг/(м · с) – коэффициент вязкости воды), и сделаем вычисления. Подсчет показывает, что уже для обычных волн, бороздящих наши пруды и реки ($\lambda \sim 1$ м), время затухания достаточно велико – порядка 3 часов, а для морских волн ($\lambda \sim 10 - 100$ м) оно в сотни и тысячи раз больше. Поэтому для длинных волн затухание за счет вязкости совершенно несущественно. Оно определяет лишь эволюцию коротких капиллярных волн ($\lambda \sim 1$ см).

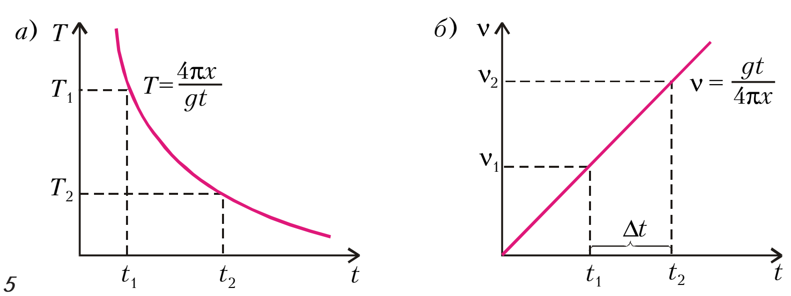

Рис. 5

Резонанс

«Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою». Воспользуемся и мы советом Козьмы Пруткова и кинем в воду, через равные промежутки времени, сорок камней. Сколько волн побежит при этом?

Математик скажет – задача некорректна. И будет прав. Но давайте подойдем к этому вопросу без излишней математической строгости и попробуем сначала получить ответ экспериментально. Правда, опыт лучше провести не на пруду, а в длинном, узком и прямом канале – в этом случае движение волн одномерное, и наблюдать их можно гораздо дольше. Результат эксперимента таков: через некоторое время из образовавшегося на поверхности воды хаоса выделится движущийся волновой пакет, состоящий из двадцати волн.

Итак, ответ у поставленного вопроса есть. Теперь попытаемся получить его теоретически.

Для этого надо знать один простой секрет – когда камень падает в воду, он порождает бесконечное количество гармонических волн. «Как же так, – скажете вы, – он просто изменяет профиль поверхности $h(x)$, делая его похожим на параболу». Оказывается, это одно и то же.

Основой такого утверждения является знаменитая *теорема Фурье*, согласно которой любая четная функция $h(x)$ (для наших целей достаточно рассматривать лишь четные функции) может быть представлена как сумма бесконечного количества косинусов (разложена в ряд Фурье):

$$h(x) = \int_0^\infty a(k)\cos(kx)\,dk.$$

Человеку, который первый раз знакомится с теоремой Фурье, она кажется неправдоподобной – косинус совершенно непохож на всем привычную параболу. Но все же она справедлива. Попробуйте построить на экране компьютера функцию, заданную рядом

$$h(x) = -\cos\pi x + \frac{1}{2^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \ldots$$

на интервале $-1 < x < 1$. Складываем косинусы, а получаем... параболу!