Два этюда о расстояниях

Е. ШИКИН

В основу определения расстояния положены три свойства — положительная определенность, симметричность и неравенство треугольника, которые с житейской точки зрения выглядят совершенно естественными. В самом деле, разве возникают сомнения в том, что расстояние между двумя различными пунктами должно характеризоваться положительным числом, не зависящим от того, из какого из этих пунктов ведется отсчет и как часто, срезая углы, мы пользуемся тропинками («народными тропами»), протоптанными ранее другими нетерпеливыми пешеходами (рис.1)?

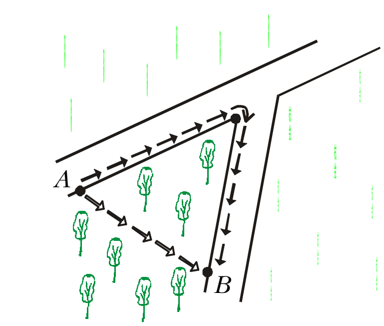

Рис. 1

Само понятие расстояния вводится в два этапа.

Сначала формулируется правило.

Говорят, что на множестве χ введено расстояние, если указан закон, согласно которому любым двум элементам A и B этого множества ставится в соответствие число (будем обозначать его $\operatorname{dist}(A, B)$), и выполнены следующие условия:

1) *положительная определенность:*

$$\operatorname{dist}(A, B) \geq 0,$$

причем равенство $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда элементы A и B совпадают;

2) *симметричность*:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(B, A)$$

для любых элементов A и B;

3) *неравенство треугольника*:

$$\operatorname{dist}(A, C) \leq \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C)$$

для любых элементов A, B и C рассматриваемого множества.

Число $\operatorname{dist}(A, B)$ называется *расстоянием между элементами A и B*.

Обычно мы встречаемся с ситуацией, когда способ вычисления расстояний задан (уже кем-то придуман). Но как поступать в случае, когда подобного правила еще нет?

В принципе существует универсальный способ введения расстояния на любом множестве, вне зависимости от природы его элементов. Достаточно положить расстояние между разными элементами множества равным единице:

$$\operatorname{dist}(A, B) = 1 \text{ при } A \neq B,$$

а между совпадающими – нулю:

$$\operatorname{dist}(A, B) = 0 \text{ при } A = B.$$

Нетрудно убедиться в том, что все три условия определения выполнены, причем неравенство треугольника всегда будет строгим (за исключением тривиального случая, когда среди элементов A, B и C есть совпадающие).

Вместе с тем, предложенное правило лишено привычного нам свойства, которое позволяло бы сравнивать расстояния, пользуясь словами *больше* и *меньше*, – расстояние между любыми двумя различными элементами оказывается всегда одним и тем же.

Существуют, разумеется, и другие правила исчисления расстояний. Наиболее распространенные опираются на использование *единицы измерения*, или *эталона длины*. Однако и здесь часто приходится сталкиваться с расстояниями, наделенными и иными, иногда довольно неожиданными свойствами.

Проиллюстрируем сказанное.

Этюд первый: внутренняя геометрия бумажного листа

Обычный лист бумаги имеет форму прямоугольника (рис.2). Пусть A и B – противоположные вершины. Как

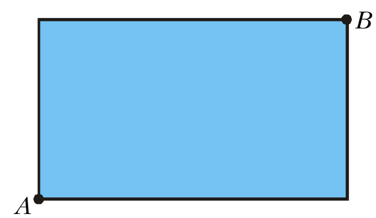

Рис. 2

вычисляется расстояние между ними? Да очень просто – точки A и B соединяются отрезком и измеряется его длина (рис.3). Это и будет искомым расстоянием.

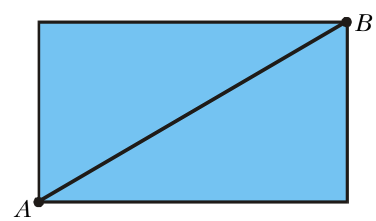

Рис. 3

Теперь немного изогнем лист. Например, так, как это показано на рисунке 4. И вновь поставим тот же

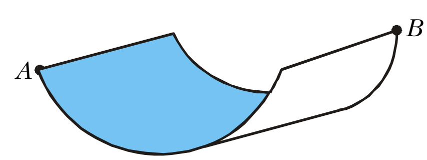

Рис. 4

вопрос: как вычислить расстояние между точками A и B? Кажется, тоже

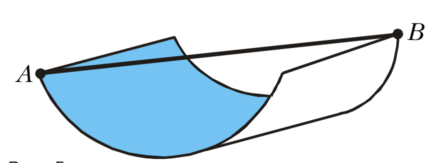

Рис. 5