8. $F_{\max} = 80$ мН. **9.** $\Delta h = 4$ м. **10.** $F_{\text{ср}} = 150$ Н.
11. $V = 480$ л. **12.** $\alpha = 120°$.

Вариант 2

1. $a = 3$ м/с^2. **2.** $v = 440$ см/с. **3.** $F_{\text{н}} = 2$ Н.
4. $h = 50$ м. **5.** $U = 250$ Дж. **6.** $\Delta T = 3$ К. **7.** $l = 27$ см.
8. $\alpha_{\text{пр}} = 30°$. **9.** $\Delta t = 40$ с. **10.** $m_3 = 600$ г.
11. $E = 75$ кВ/м. **12.** $I = 6$ А.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-3 < a < 1$. *Указание.* График функции $f(x) = \left||x-2|-2x+1\right|$ (рис.6) состоит из трех прямолинейных участков. Для того чтобы данное уравнение имело ровно три решения, необходимо и достаточно, чтобы прямая, заданная уравнением $y = kx + a$, пересекала его правую и среднюю части в их внутренних точках. Ясно, что точка пересечения такой прямой с осью ординат находится между точками $A(0,-3)$ и $B(0,1)$.

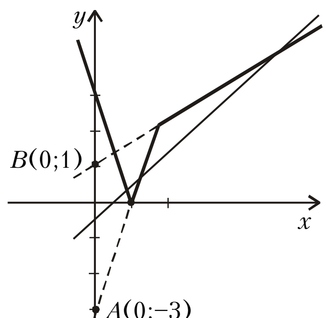

Рис. 6

2. $\left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3. $(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k + \frac{\pi}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Указание. Воспользуйтесь разложением на множители:

$$\sin 2x - \cos 2x - \frac{1}{2} - \sin x = \frac{1}{2}(2\cos x - 1)(2\sin x - 2\cos x - 1).$$

4. $d = \frac{1}{3}\left(-a + \sqrt{a^2 + 6S\operatorname{ctg}\varphi}\right)$. Пусть d – разность арифметической прогрессии, $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OC = x_3$, $OD = x_4$, $\angle AOB = \alpha$, где O – точка пересечения диагоналей. По теореме косинусов $a^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\alpha$, $(a+d)^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3\cos\alpha$, $(a+2d)^2 = x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4\cos\alpha$, $(a+3d)^2 = x_4^2 + x_1^2 + 2x_4x_1\cos\alpha$.
Отсюда получаем, что $(a+3d)^2 - (a+2d)^2 + (a+d)^2 - a^2 = 2\cos\alpha\cdot(x_4x_1 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_1x_2) = 2\cos\alpha\cdot AC\cdot BD$, т.е. $d(2a+5d) + d(2a+d) = 4S\operatorname{ctg}\alpha$, или $d(2a+3d) = 2S\operatorname{ctg}\alpha$.
Так как $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то α – острый угол, $\alpha = \varphi$. Остается найти положительный корень уравнения $3d^2 + 2ad - 2S\operatorname{ctg}\varphi = 0$.

5. $\varphi = 2\arcsin\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$.

Вариант 2

1. $a \in (-\infty; -1] \cup (0; 4)$. *Указание.* Условию удовлетворяют значения a, при которых прямая $y = a$ пересекает график функции $y = 4|x| - (x+1)^2$, $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ ровно в одной точке.

2. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

3. $x = \pm\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + (k+l)\pi$,

$y = \pm\frac{\pi}{3} \mp \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{8} + (k-l)\pi$, $z = \mp\frac{2\pi}{3} + \pi - 2\pi k$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

Подставив $z = \pi - x - y$, получим систему

$$\begin{cases} \cos x\cos y\cos(x+y) = -\frac{1}{12}, \\ \sin x\sin y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Замена $t = \cos x\cos y$ приводит к уравнению $t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{12} = 0$, откуда $t = \frac{1}{6}$ или $t = \frac{1}{2}$. Второй случай невозможен, поскольку тогда мы имели бы, что

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} > 1.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \cos x\cos y = \frac{1}{6}, \\ \sin x\sin y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos x\cos y + \sin x\sin y = \frac{5}{6}, \\ \cos x\cos y - \sin x\sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Следует рассмотреть три случая, в зависимости от того, какое из указанных чисел является средним членом прогрессии. Решения, удовлетворяющие условиям, существуют лишь в том случае, когда средним членом является $|x-1|$. Осталось решить систему

$$\begin{cases} 2|x-1| = 2(x-1), \\ |2x-4| > 1. \end{cases}$$

5. $\frac{S_{BMC}}{S_{BMDA}} = \frac{r}{2R-r}$. Положим $AB = a$, $AD = b$, $CM = x$, $BM = y$. Поскольку окружность радиуса R вписана в трапецию $ABMN$, то $b + y = a + (a - x)$, откуда $y = 2a - b - x$. Поэтому периметр треугольника BMC равен $b + y + x = 2a$. Таким образом, $S_{BMC} = a\cdot r$. Далее $S_{ABCD} = 2R\cdot a$, значит, $S_{BMDA} = a(2R - r)$.

Вариант 3

1. $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Искомое множество является объединением части плоскости, заданной неравенством $y \ge \max\left\{x^2, 1\right\}$, и нижней половины окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

3. $(-\infty; -1) \cup \left[0; \log_3\frac{4}{3}\right) \cup \left(\log_3 4; \log_3\frac{16}{3}\right)$.

4. $|a| \ge \frac{15}{2}\pi$. **5.** $AB = \left(\sqrt{2a} + \sqrt{c}\right)^2$.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -2. **2.** 25%. **3.** 6. **4.** -1. **5.** $y = 0$, $x = -1$. **6.** 7. **7.** $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

8. $-\frac{15}{8}$. **9.** $\pm\frac{1}{4}$. **10.** 20π. **11.** -1. **12.** $-\frac{1}{4}$.

13. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.** $3a + ab$. **15.** 0,6(7).

16. $\{(0; -2); (2; 0)\}$. **17.** $(-1; 1]$. **18.** $\sqrt{2}$.

19. $n = 6k + 1$; $n = 6k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Представляя n в виде $n = 6k + q$, где $k \in \mathbf{Z}$, а $q \in M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, име-