Заочный тур

Задание. Физический мир и виртуальная реальность

В соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, сферически-симметричное тело массой m создает гравитационный ньютонов потенциал

$$\varphi = -G\frac{m}{r},$$

где G – гравитационная постоянная, r – расстояние от тела (r > R, где R – размер тела). Строение Вселенной в значительной степени определяется силами гравитационного взаимодействия, определяемыми ньютоновым потенциалом.

Как была бы устроена Солнечная система, если бы гравитационное взаимодействие описывалось неньютоновым потенциалом вида

$$\varphi = -G\frac{mR^{n-1}}{r^n},$$

где n – любое?

1) Рассмотрите движение планеты. 2) Рассмотрите движение кометы (эллиптическую траекторию с большим эксцентриситетом). 3) Рассмотрите движение астероида (гиперболическую траекторию).

Предлагаемая задача включает в себя известную задачу Кеплера о движении тела в поле, описываемом ньютоновым потенциалом. Известно, что в этом случае траекторией движения является одна из кривых второго порядка: эллипс, гипербола или парабола в зависимости от значения полной энергии E. В частности, возможно движение по круговой орбите, при этом скорость тела связана с радиусом орбиты соотношением $v = \sqrt{Gm/r}$. Очевидно, что круговая орбита существует при любом значении n, а полная энергии системы определяется выражением

$$E = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Случай $n = 1$ соответствует задаче Кеплера, поэтому интересно исследовать изменения траектории движения при отклонении величины n от единицы. При незначительном отклонении наблюдаются прецессирующие эллиптические орбиты. По мере увеличения n характеристики орбит меняются, в частности – наблюдается резкое изменение удаления планеты со временем. Однако в случае $n < 2$ полная энергия движения отрицательна, и траектория движения финитна. Точка $n = 2$ – критическая точка. При $n > 2$ значение E положительно. Это означает, что круговые орбиты в области $n > 2$ оказываются неустойчивыми, и небольшое отклонение орбиты от круговой приводит к уходу тела от притягивающего центра на бесконечно большое расстояние.

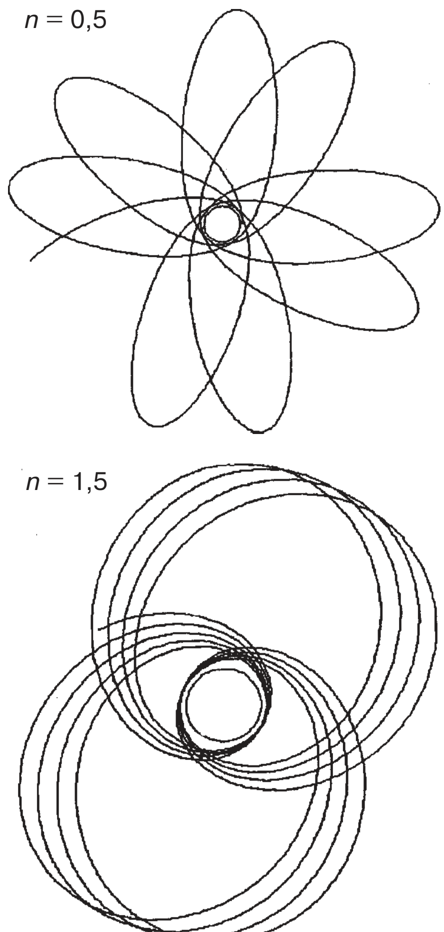

Рис. 1

Наиболее полное решение задания заочного тура было представлено командой Протвинского лицея 1 в составе: В.Евдокимов, К.Саломатин, А.Казаков, Д.Алехин, А.Хныкин, Ю.Астахов, Д.Лабин (руководитель – С.Астахов). Результаты расчетов, полученные этой командой для траекторий планет при $n = 0{,}5$ и $n = 1{,}5$, представлены на рисунке 1.

Проведенное исследование позволяет сделать интересные выводы о возможном устройстве Солнечной системы, если бы гравитационное взаимодействие описывалось неньютоновым потенциалом. При $n > 2$ устойчивого движения планет вокруг Солнца не существовало бы – планеты упали бы на Солнце или улетели на бесконечность. Даже при небольшом отклонении скорости от указанного значения расстояние до Солнца было бы резкой функцией времени. В результате поток лучистой энергии на поверхность планеты сильно изменялся бы во времени, что сделало бы жизнь нереальной.

Очный тур

Задание. Задача Улама

Известно, что в системе с большим числом степеней свободы движение отдельной частицы носит случайный (стохастический) характер. Примером является броуновское движение частицы. Однако оказывается, что случайные движения могут наблюдаться и в системе с малым числом степеней свободы. Такое движение происходит, в частности, под действием периодического возмущения. Пример – движение частицы в сосуде с дрожащими стенками.

Рассмотрим движение шарика между двумя вертикальными бесконечно тяжелыми стенками, одна из которых колеблется по гармоническому закону

$$x = a\sin\omega t$$

с частотой ω и амплитудой a. В начальный момент времени (t = 0) расстояние между стенками равно L, скорость шарика v. Начальное направление движения и положение шарика произвольны. Характер движения шарика между стенками определяется величиной изменения фазы $\varphi = \omega t_n$ от столкновения к столкновению, где t_n — момент n-го столкновения.

Опишите характер движения, проанализировав изменение фазы $\Delta\varphi$ от столкновения к столкновению. Исследуйте зависимость энергии шарика от времени. Предположите L = 1 см, a = 0,1 см и a = 0,5 см.

1) Исследуйте движение в диапазоне $v = 10^5 - 10^9$ см/с при постоянной частоте $\omega = 10^7$ с$^{-1}$. Опишите полученные результаты. 2) Исследуйте движение в диапазоне $\omega = 10^5 - 10^9$ с$^{-1}$ при постоянной скорости $v = 10^7$ см/с. Опишите полученные результаты. 3) Исследуйте возможную зависимость от начального положения шарика и направления движения.

Традиционно считается, что движение одной частицы определено (детерминировано). Но в общем случае это не так. Если есть нелинейный гармонический осциллятор, то под действием вынуждающей периодической силы в зависимости от соотношения параметров в системе может наступать хаос.

При $a \ll L$ области регулярного и стохастического движений определяются изменением фазы от столкновения к столкновению, т.е. величиной

$$\Delta\varphi = \varphi_{n+1} - \varphi_n = 2L\omega/v_n,$$

где v_n — скорость шарика в момент n-