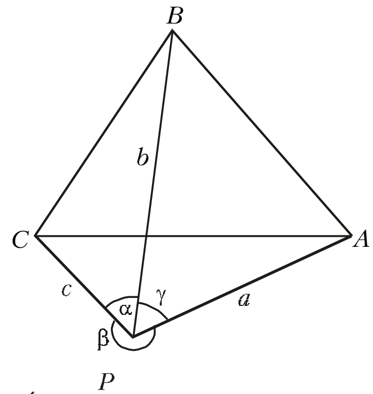

Рис. 6

Тогда

$$AB = \sqrt{a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2},$$

и так далее.

Известно, что среди всех треугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Поэтому

$$P \ge 2\sqrt{3\sqrt{3}S}, \qquad (3)$$

где P – периметр, а S – площадь треугольника ABC.

Так как

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum ab\sin\gamma\right|,$$

то неравенство (2) следует из неравенства (3).

В следующей задаче красивый факт сочетается с изящным решением.

Задача 7 (касательные к двум окружностям). *Проведем четыре общие касательные к двум окружностям и точки касания соединим хордами, как показано на рисунке 7. (Эти хорды*

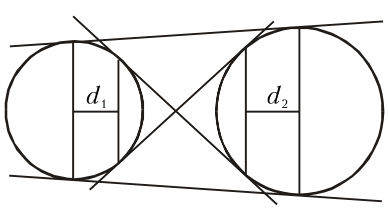

Рис. 7

параллельны, так как они все перпендикулярны линии, соединяющей центры окружностей). Докажите, что $d_1 = d_2$.

Решение (отрезки касательных). Из рисунка 8 имеем

$$2BC + CD = AB + BD = AB + BH =$$

$$= GE + EF = EC + EF = 2ED + CD.$$

Следовательно, $BC = ED$, и значит, $AB = EF = IH$. Из этих равенств следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Поэтому

$$d_1 = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = d_2.$$

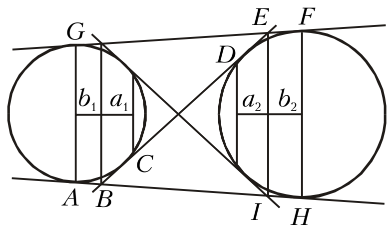

Рис. 8

Следующую задачу, конечно же, нельзя назвать малоизвестной, но я не могу удержаться, чтобы не привести ее красивое решение.

Задача 8 (двойная сумма). *Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j} \ge 0.$$

Решение (интеграл). Рассмотрим многочлен

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x^{i+j-1}.$$

Тогда

$$xp(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x^{i+j} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)^2 \ge 0$$

для всех вещественных x.

В частности, $p(x) \ge 0$ при $0 \le x \le 1$. Поэтому

$$0 \le \int_0^1 p(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j}x^{i+j}\Bigg|_0^1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j}.$$

Неравенство строгое, за исключением случая $xp(x) \equiv 0$, т.е. $a_1 = a_2 = \ldots$ $\ldots = a_n = 0$.

Задача 9 (четыре окружности). *На рисунке 9 точки A и B – центры больших окружностей. Из точек C и D проведены касательные. Докажите, что маленькие вписанные окружности имеют одинаковые радиусы.*

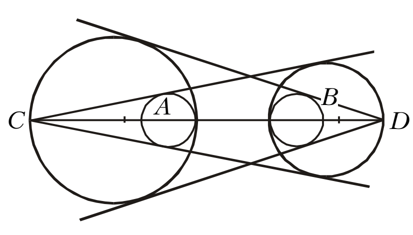

Рис. 9

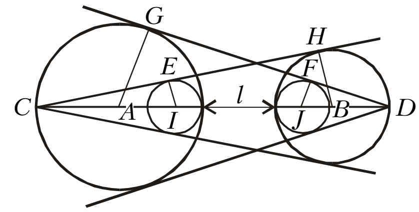

Рис. 10

Первое решение (подобие). Пусть R_a и R_b – радиусы больших окружностей, r_a и r_b – радиусы маленьких окружностей. Так как $\Delta CEI \sim \Delta CHB$ (рис.10), то отсюда

$$r_a = \frac{2R_aR_b}{2R_a + 2R_b + l}.$$

Так как

$$\Delta DFJ \sim \Delta DGA,$$

то аналогично получаем, что

$$r_b = \frac{2R_aR_b}{2R_a + 2R_b + l}.$$

Второе решение (подобие). Так как в подобных треугольниках CC_1C_2 и $CC_1'C_2'$ (рис.11) радиусы вписанных

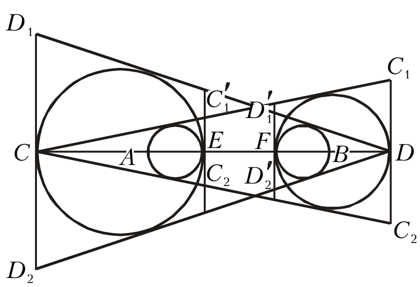

Рис. 11

окружностей пропорциональны высотам, то

$$\frac{R_b}{r_a} = \frac{CD}{CE},$$

или

$$r_a = \frac{CE\cdot R_b}{CD} = \frac{2R_bR_a}{CD}.$$

Аналогично, для треугольников DD_1D_2 и $DD_1'D_2'$ имеем

$$r_b = \frac{DF\cdot R_a}{CD} = \frac{2R_bR_a}{CD}.$$

Следующая задача тоже довольно известная, но наличие у нее большого числа симпатичных решений позволяет ей занять место в десятке.

Задача 10 (равные углы). *В треугольнике ABC точки N, L, M, в данном порядке лежащие на стороне AC, являются, соответственно, основаниями*

(Окончание см. на с. 34)