Задача 3 (проекции). *На плоскости расположено конечное число отрезков общей длиной 1. Докажите, что существует такая прямая l, что сумма длин проекций этих отрезков на l меньше, чем $2/\pi$.*

Решение (вписанная окружность). Мы передвинем параллельно самим себе все n отрезков так, чтобы их середины совпали в точке V (рис.2).

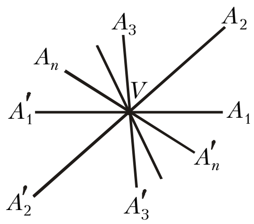

Рис. 2

Обозначим $2n$ полученных концов отрезков

$$A_1, A_2, \dots, A_n, A_1', A_2', \dots, A_n'.$$

Начиная от некоторой точки P_n', нарисуем отрезок $P_n'P_1$, равный и параллельный VA_1, затем нарисуем отрезок P_1P_2, равный и параллельный VA_2, и так далее; мы получаем точки P_3, … …, P_n, P_1', …, P_{n-1}'. В итоге получится (рис.3) выпуклый $2n$-угольник P с центром симметрии O (потому что пары

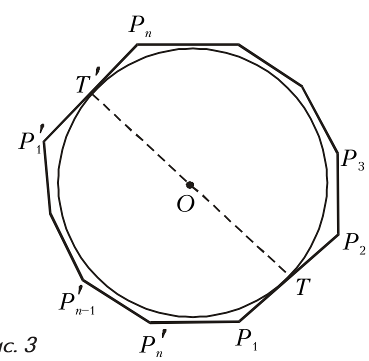

Рис. 3

противоположных сторон этого многоугольника равны и параллельны).

Выберем пару противоположных параллельных сторон, расстояние между которыми d минимально. Рассмотрим окружность с центром в точке O и диаметром d.

Эта окружность касается двух противоположных сторон во внутренних точках T и T'. Следовательно, она целиком лежит внутри многоугольника P. Поэтому

$$\pi d < \text{ периметр } P = 1.$$

Значит,

$$d < \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, ортогональные проекции всех $2n$ сторон многоугольника P на прямую TT' имеют общую длину $2d < 2/\pi$, что и требовалось доказать.

Чтобы лучше оценить следующую задачу, попробуйте сначала решить ее самостоятельно.

Задача 4 (циклическая сумма). *Пусть n – натуральное число, $n \geq 4$. Найдите наилучшие оценки снизу и сверху для суммы*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}$$

(здесь, конечно, $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$) для всех наборов n вещественных неотрицательных чисел (x_1, x_2, …, x_n), в которых по циклу нет трех нулей подряд.

Решение (на границе нули). Докажем, что

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}} \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

причем эти границы являются наилучшими.[1]

Пусть S – это данная сумма и $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Тогда

$$S > \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T} + \ldots + \frac{x_n}{T} = 1.$$

Для того чтобы показать, что 1 – это наилучшая оценка снизу, положим $x_i = \varepsilon^{i-n}$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Имеем

$$S = \frac{\varepsilon^{i-n}}{1 + \varepsilon^{1-n} + \varepsilon^{2-n}} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\varepsilon^{i-n}}{\varepsilon^{i-n-1} + \varepsilon^{i-n} + \varepsilon^{i-n+1}} + \frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon^{1-n}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-1} + 1 + \varepsilon} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon^{1-n}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1.$$

Теперь мы докажем, что наилучшая верхняя оценка равна m при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$.

Пусть $n = 2m$. Заметим, что

$$\frac{x_1}{x_{2m} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = 1$$

(здесь, конечно же, использовано условие $x_1 + x_2 > 0$, но случай $x_1 = x_2 = 0$ очевиден). Аналогичные неравенства справедливы для всех пар последовательных слагаемых. Таким образом, получаем верхнюю оценку m; она достигается при $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0$.

Пусть $n = 2m + 1$. Без ограничения общности мы можем предположить, что наименьший знаменатель – это $x_1 + x_2 + x_3$. Тогда

$$\frac{x_1}{x_{2m+1} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} \leq 1.$$

А теперь достаточно снова воспользоваться тем, что сумма двух последовательных слагаемых не больше 1. При этом верхняя граница m достигается при $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0$.

Результат следующей задачи является первым шагом на пути решения весьма непростой проблемы.

Задача 5 (треугольник из бумаги). *Докажите, что любой треугольный кусок бумаги площадью 1 можно согнуть так, что, положенный на стол, он будет занимать площадь меньше, чем*

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Первое решение (биссектриса). Пусть ABC – данный треугольник со сторонами $a \leq b \leq c$.

Пусть точка D на стороне BC такова, что AD – это биссектриса угла A. Мы сложим треугольник ABC вдоль отрезка AD. Получившийся треугольник занимает площадь, равную

$$S_{ABD} = \frac{c}{b + c}.$$

Аналогично, если мы сложим треугольник ABC вдоль биссектрисы угла C, то площадь, покрываемая полученной фигурой, равна $\frac{b}{a + b}$.

Таким образом, остается только доказать, что

$$\min\left(\frac{b}{a + b}, \frac{c}{b + c}\right) < \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

или

$$\min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right) < \left(\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - 1\right)^{-1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = r.$$

Если $\frac{b}{a} < r$, то все доказано.

---

[1] *Квадратными скобками обозначена целая часть числа.*