$I = I_0 + md^2 = (\gamma + 1)md^2$. Для точечной массы на конце стержня $\gamma = 0$, а для однородного стержня $\gamma = 1/3$.

А в каких пределах может изменяться параметр γ? Рассмотрим невесомый стержень с точечными массами на его концах. Меняя величины масс m_1 (внизу), m_2 (вверху) и длину стержня l, можно получить все возможные значения параметров m, d, I_0 и γ (для данного случая $\gamma = m_1/m_2$, проверьте это самостоятельно). Например, гантелька с массой $m/4$ внизу и $3m/4$ наверху будет полностью эквивалентна однородной палочке. Видно, что параметр γ может принимать любые положительные значения.

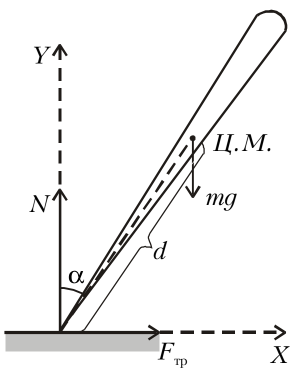

Рис. 2

Итак, запишем закон динамики вращательного движения стержня относительно нижней точки (рис.2):

$$mgd\sin\alpha = \left(I_0 + md^2\right)\varepsilon,$$

или

$$g\sin\alpha = (\gamma + 1)\varepsilon d,$$

и закон сохранения энергии:

$$mgd(1 - \cos\alpha) = \left(I_0 + md^2\right)\frac{\omega^2}{2},$$

или

$$g(1 - \cos\alpha) = (\gamma + 1)\frac{\omega^2 d}{2},$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ – угловое ускорение. Выразим проекции ускорения центра масс a_x и a_y на горизонтальную и вертикальную оси через линейное ускорение εd и центростремительное ускорение $\omega^2 d$:

$$\begin{aligned} a_x &= d\left(\varepsilon\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha\right), \\ a_y &= -d\left(\varepsilon\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha\right). \end{aligned} \qquad (1)$$

Теперь с помощью законов Ньютона

$$F_{тр} = ma_x,\ N - mg = ma_y \qquad (2)$$

найдем зависимости $F_{тр}$ и N от угла α:

$$F_{тр} = \frac{3mg}{\gamma + 1}\sin\alpha\cdot\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$N = \frac{3mg}{\gamma + 1}\left(\cos^2\alpha - \frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{\gamma}{3}\right).$$

Чтобы выяснить условия начала проскальзывания, надо исследовать поведение функции

$$\mu = \left|\frac{F_{тр}}{N}\right| = \left|\frac{\sin\alpha\cdot\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right)}{\cos^2\alpha - \frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{\gamma}{3}}\right|.$$

Качественно поведение этой функции представлено графически на рисунке 3. (Для нахождения экстремумов функции надо приравнять к нулю производную этой функции. Убедитесь сами, что получается квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$.) Интервалы функции, соответствующие проскальзыванию, выделены более жирными линиями, а интервалы углов – штриховкой на оси абсцисс. Левая область соответствует проскальзыванию против направления падения ($\mu < \mu_1$), а правая – проскальзыванию в сторону падения ($\mu > \mu_1$).

При $0 < \gamma < 1/3$ (рис.3,*а*) проскальзывание начнется при любом сколь угодно большом значении коэффициента трения μ, причем при угле, меньшем некоторого α_0. (При $\gamma \to 0$ угол $\alpha_0 \to \alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48{,}2°$, а при $\gamma = 1/3$ угол $\alpha_0 = \alpha_2 = \arccos(1/3) \approx$ $\approx 70{,}5°$.) Поведение стержня получается качественно таким же, как и падающей палочки. При $\gamma > 1/3$ функция остается конечной при всех α (рис. 3, *б*,*в*). Значит, при достаточно большом

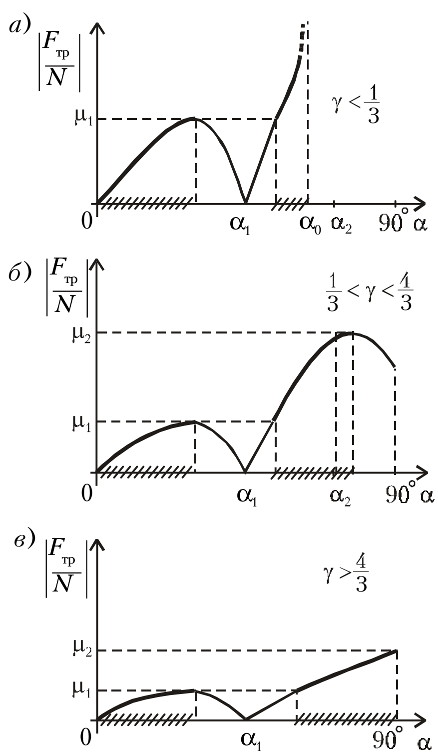

Рис. 3

коэффициента трения ($\mu > \mu_2$) проскальзывания не будет вовсе.

Отметим, что при $\gamma \to 0$, что соответствует переходу к задаче, рассмотренной в «Задачнике Буховцева», проскальзывание начнется при любом μ, причем для $\mu > \sqrt{5}/2$ проскальзывание будет происходить в сторону падения и начнется при угле, чуть большем $\arccos(2/3)$. Впрочем, значения сил $F_{тр}$ и N в момент начала проскальзывания будут очень малыми.

Что же будет происходить после начала скольжения? Как убедиться в том, что нижний конец стержня будет скользить, не отрываясь от пола? Смещение нижнего конца стержня не повлияет на второе из уравнений (1), и после подстановки a_y во второе из уравнений (2) получим

$$N - m\left(g - \omega^2 d\cos\alpha\right) = -md\varepsilon\sin\alpha. \qquad (3)$$

Запишем теперь закон динамики вращательного движения относительно центра масс стержня:

$$Nd\sin\alpha - F_{тр}d\cos\alpha = I_0\varepsilon,$$

или

$$N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = \gamma md\varepsilon.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \pm\mu N$ (верхний знак соответствует скольжению против направления падения), получим

$$N(\sin\alpha \mp \mu\cos\alpha) = \gamma md\varepsilon. \qquad (4)$$

Отметим, что выражение в скобках в момент начала проскальзывания положительно и, значит, не может обратиться в ноль и изменить знак при увеличении α.

Из уравнений (3) и (4) выразим N:

$$N = \frac{m\gamma\left(g - \omega^2 d\cos\alpha\right)}{\gamma + \sin\alpha\cdot(\sin\alpha \mp \mu\cos\alpha)}.$$

Видно, что, для того чтобы N обратилась в ноль (произошел отрыв), должно обратиться в ноль выражение $W(\alpha) =$ $= g - \omega^2 d\cos\alpha$. Так как в начале проскальзывания это выражение положительно, при обращении в ноль оно должно убывать, т.е. $dW/d\alpha < 0$. Однако

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{d\left(\omega^2\right)}{d\alpha}d\cos\alpha + \omega^2 d\sin\alpha.$$

Поскольку $d\left(\omega^2\right)/d\alpha = 2\omega(d\omega/d\alpha) =$ $= 2(d\alpha/dt)(d\omega/d\alpha) = 2(d\omega/dt) = 2\varepsilon$, а из выражения (4) следует, что ε обращается в ноль одновременно с N, то в момент отрыва $dW/d\alpha = \omega^2 d\sin\alpha >$ > 0. Из полученного противоречия следует, что N не может обратиться в ноль, т.е. отрыв невозможен!