Решения задач М1641, М1646 — М1650, Ф1658 —Ф1667

М1641. *Есть полубесконечная полоска бумаги, разделенная на клеточки с номерами 1, 2, 3, …, и n камней. На первой клеточке камень лежит всегда. Разрешается положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно.*

Докажем, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно. Доказательство будет индуктивным. Индукция проводится по числу камней.

Случай $n = 1$ очевиден – на первой клетке камень лежит по условию.

Пусть можно положить камень на клетку 2^{n-1}, используя n камней. Покажем: как добраться до клетки 2^n, используя на один камень больше. Все требуемые для этого действия разбиваются на четыре этапа.

Этап 1. Без использования дополнительного камня поместим камень на клетку 2^{n-1}.

Этап 2. Дополнительный камень поместим на клетку $2^{n-1} + 1$.

Этап 3. Теперь уберем с полоски все камни, кроме самого первого (лежащего на первой клетке) и самого последнего (лежащего на клетке $2^{n-1} + 1$). Это можно сделать, повторяя в обратном порядке действия, совершенные на этапе 1 (разрешенные действия симметричны относительно постановки и снятия камней).

Этап 4. Теперь забудем о первых 2^{n-1} клетках полоски. Повторим все действия этапа 1, считая начальным камень, лежащий на клетке $2^{n-1} + 1$. При этом мы ставим и снимаем камни, освободившиеся на этапе 3.

Последним действием этапа 4 на клетку $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ кладется камень, что и требовалось показать.

Дальше клетки с номером 2^{n-1} камень положить нельзя. Доказательство также использует индукцию по числу камней. И в этом случае база индукции очевидна (при $n = 1$ единственный камень остается на первой клетке по условию).

Теперь предположим, что для всех $k < n$ доказываемое утверждение верно, т.е. для того, чтобы положить камень на клетку с номером большим 2^{k-1}, нам нужно использовать более k камней.

Пусть N – максимальный номер клетки, на которую можно положить камень при использовании n камней. Обозначим количество требуемых для этого действий T, состояние полоски (положения камней, лежащих на ней) после t действий обозначим $A(t)$, наибольший номер клетки, в которой лежит камень после t действий, обозначим $N(t)$ (в этих обозначениях $N = N(T)$). Из правил, по которым кладутся и снимаются камни, следует, что $N(t) - 1 \le N(t+1) \le N(t) + 1$. Поэтому среди чисел $N(t)$ обязательно встретятся все числа от 1 до N, быть может, не один раз.

Разобьем полоску на две части: клетки от 1 до $2^{n-2} + 1$ образуют левую часть, а клетки с номерами, большими $2^{n-2} + 1$, образуют правую часть.

Если $N \le 2^{n-2} + 1$ (все камни в левой части), то предположение индукции доказано и для n камней.

В противном случае найдется такое t_0, что выполнено $N(t_0) = 2^{n-2} + 1$ и $N(t) > 2^{n-2} + 1$ при $t > t_0$. Другими словами, начиная с момента t_0, в правой части находится хотя бы один камень.

Лемма. При $t > t_0$ в левой части находятся по крайней мере два камня.

Доказательство. Камень, стоящий на первой клетке, находится в левой части всегда. Предположим, что в некоторый момент t' в левой части не осталось никаких камней за исключением первого. Для $t_0 \le t \le t'$ обозначим через $B(t'-t)$ такое состояние полоски, которое отличается от состояния $A(t)$ тем, что сняты все камни из правой части (а в левой части $A(t)$ совпадает с $B(t'-t)$). В состоянии $B(0)$ есть ровно один камень на первой клетке. Переход от состояния $B(\tau)$ к состоянию $B(\tau+1)$ совершается разрешенным действием (правила обратимы – если можно поставить камень, то его можно следующим действием снять, и наоборот). В состоянии $B(t'-t_0)$ на клетке $2^{n-2} + 1$ лежит камень. В любом состоянии $B(t)$, $0 \le t \le t' - t_0$, на полоске лежит не более $n - 1$ камня. Действительно, момент t_0 был выбран так, что в любой момент после него в правой части полоски есть хотя бы один камень. При переходе от $A(t'-t)$ к $B(t)$ теряются все камни, оказавшиеся в правой части. Так что в состоянии $B(t)$ по крайней мере на один камень меньше, чем в состоянии $A(t'-t)$. Таким образом, состояния $B(t)$ описывают способ положить камень на $2^{n-2} + 1$ клетку, начиная от одного камня на первой клетке и используя не более $n - 1$ камня. Это противоречит предположению индукции.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь забудем о всей левой части полоски, кроме клетки $2^{n-2} + 1$. Как следует из доказанной леммы, от момента t_0 до T в правой части полоски используется не более $n - 2$ камней. Обозначим через $C(t)$, $t_0 \le t \le T$, такое состояние полоски, которое получается из $A(t)$ сдвигом влево на 2^{n-2} и добавлением камня на первую клетку, если его там нет. Состояния от $C(t_0)$ до $C(T)$ описывают способ положить камень на клетку с номером $N - 2^{n-2}$, начиная от одного камня на первой клетке и используя не более $n - 1$ камня.

В силу предположения индукции $N - 2^{n-2} \le 2^{n-2}$, поэтому $N \le 2^{n-1}$. Применение принципа математической индукции завершает доказательство.

М.Вялый

М1646. *У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что в результате все овцы собрались у одного крестьянина.*

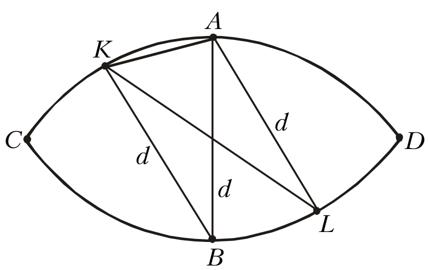
На простых примерах проверяется, что ситуация 7 раскулачиваний в принципе возможна.

Теперь докажем непосредственно утверждение задачи. После первого раскулачивания у всех, кроме раскулаченного, число овец делится на 2, общее число овец тоже делится на 2, значит, и остаток у раскулаченного тоже делится на 2. Аналогично, после второго раскулачивания у каждого число овец делится на 4, ..., после седьмого – на $2^7 = 128$. Это значит, что у одного из крестьян – 128 овец, а у остальных – по 0 овец, что и требовалось доказать.

А.Шаповалов

М1647. *Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)*

Пусть A и B — любые две точки данного множества M, расстояние между которыми равно диаметру d этого множества. Тогда из определения диаметра следует, что если $P \in M$, то P лежит внутри или на границе «линзы», образованной пересечением кругов радиуса d с центрами A и B (см. рисунок) Докажем, что на одной из дуг AKC и BLD нет точек множества M, т.е. что если $K \neq A$, $L \neq B$, то $KL > d$.



Действительно, если $\angle BAK = \alpha$, $\angle LAK = \beta$, то $\beta > \alpha$ и из теоремы косинусов получаем

$$KL^2 = AK^2 + d^2 - 2AK \cdot d\cos\beta > d^2,$$

так как $AK = 2d\cos\alpha > 2d\cos\beta$.

Пусть, например, на дуге AC нет точек множества M за исключением точки A. Тогда, выбросив точку A и разделив оставшееся множество точек на части по прямой AB, получим искомое разбиение, добавив точки прямой AB к левой части.

Легко видеть, что в каждой из двух полученных таким образом частей нет точек на расстоянии d.

В.Дольников

М1649 [1]**.** *На конференцию приехали 300 участников. Каждый участник знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на три группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для ее членов.*

Каждый человек не владеет ровно двумя языками. Изобразим языки точками – вершинами графа, а пары языков отрезками – ребрами графа. На каждом ребре напишем, сколько человек не владеют соответствующими двумя языками. Сумма всех написанных чисел равна 300.

Если участники конференции распределены требуемым в задаче образом на три группы, то выполнены два условия. Во-первых, на соединяющих эти языки ребрах написаны числа, не превосходящие 100 (поскольку люди, не владеющие двумя из трех рассматриваемых языков, должны войти в третью группу).

Во-вторых, количество людей, не владеющих некоторым языком, – это сумма чисел, написанных на четырех ребрах, выходящих из соответствующей вершины. Значит, такая сумма не должна превосходить числа 200 (иначе этим языком будут владеть менее 100 человек).

План решения таков: мы докажем существование трех языков, удовлетворяющих двум последним условиям, и докажем затем, что эти условия не только необходимы, но и достаточны.

Назовем вершину плохой, если сумма чисел, написанных на выходящих из нее ребрах, больше 200. Назовем ребро плохим, если написанное на нем число больше 100. Если бы нашлись три плохие вершины, то мы сложили бы три соответствующие суммы и получили число больше 600, что противоречило бы условию задачи. Значит, в графе не более двух плохих вершин.

Если в графе есть хотя бы одна плохая вершина, то все плохие ребра выходят из нее (иначе сумма чисел на плохом ребре и на ребрах, выходящих из плохой вершины, была бы больше 300). Следовательно, если в графе есть плохая вершина, то все неплохие его вершины (их число, как мы уже говорили, не меньше 3) соединены между собой неплохими ребрами. Если же в графе нет ни одной плохой вершины, то мы воспользуемся тем, что количество плохих ребер не превосходит двух и потому найдется треугольник из неплохих ребер (убедитесь в этом!).

Доказательство достаточности состоит в том, что если языки A, B, C удовлетворяют условиям, то мы будем по очереди распределять людей в три группы так, чтобы в одной все говорили на языке A, в другой – на языке B, в третьей – на C. На каждом этапе будем рисовать ориентированный граф, вершины которого – наши три группы и очередной человек X, которого мы должны куда-то поместить. От X стрелки проведем во все вершины, соответствующие группам, на языке которых X говорит. Из одного из языков A, B, C к другому проведем стрелку, если в соответствующей этому языку группе есть человек, владеющий языком другой группы.

Мы хотим поместить X в одну из трех групп. Очевидно, X знает хотя бы один из языков A, B, C. Для определенности, пусть X знает язык группы A. Если группа A не заполнена до конца, то поместим X в нее, если нет, но из группы A можно пройти по стрелке в незаполненную группу B, то поместим X в группу A и одного человека из группы A переместим в группу B.

Рассуждая в таком духе, можно понять, что мы можем легко разместить очередного человека во всех случаях, кроме того, когда все группы, в которые можно от него дойти, двигаясь по стрелкам, уже заполнены.

Этих заполненных групп одна или две. Если одна, то X и все люди группы A не знают языков B и C. Тогда парой языков B и C владеет менее 200 человек, что противоречит условию. Если же доступных групп две, то X и все люди этих двух групп не говорят на третьем языке, так что третьим языком владеет недопустимо малое число участников конференции.

А.Берзиньш, А.Спивак, Г.Челноков

[1] *Решение задачи М1648 приведено в заметке «Гауссовы суммы».*

М1650*. *На плоскости нарисован граф без циклов Г. Известно, что граф Г′, полученный из Г параллельным переносом на вектор (1, 0), не пересекается с Г. На графе Г отмечены две различные точки A и B, в которых в начальный момент времени сидели два жука. Ползая по графу, жуки через некоторое время снова оказались в точках A и B, но при этом поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между жуками было меньше 1.*

Итак, пусть жуки образуют пару (x, y), т.е. первый находится в точке x, второй – в точке y. Нам надо доказать, что, двигая жуков, как указано в задаче, мы не можем из пары (x, y) получить пару (y, x). Для этого мы придумаем такую функцию от x, y, что она непрерывна по x и y, для всех разрешенных положений x и y она не равна нулю, и если для пары (x, y) она больше нуля, то для пары (y, x) – меньше. Тогда, очевидно, из пары (x, y) нельзя получить пару (y, x).

Построим требуемую функцию. Нарисуем на плоскости графы Г и Г′ (перенос графа Г на вектор $\vec{a}$). Представим себе, что из x в y по графу Г проползла жужелица, а из y' в x' по графу Г′ одновременно с жужелицей прополз таракан. Посмотрим, на какой угол при этом повернулся вектор $\vec{ЖТ}$ (угол считаем ориентированным: угол поворота корректно определен, поскольку вектор $\vec{ЖТ}$ всегда не ноль). Можно показать, что величина этого угла зависит только от точек x и y, т.е. не зависит от конкретного способа, которым ползли жужелица и таракан.

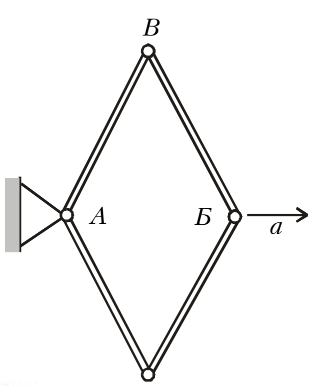
Докажем, что указанный угол непрерывно зависит от x и y. В самом деле, возьмем точку x_1 и представим себе, что жужелица сначала проползла из x_1 в x, таракан при этом стоял, а потом жужелица проползла их x в y, а таракан – из y' в x'. Поворот вектора $\vec{ЖТ}$ на первом этапе непрерывно зависит от x_1. Аналогичное рассуждение подходит и для y.

Теперь докажем, что если расстояние между x и y больше 1, то поворот вектора не равен нулю. В самом деле, точки x, y, y', x' образуют параллелограмм, следовательно, если векторы $\vec{xy'}$ и $\vec{yx'}$ сонаправлены, имеем $\vec{xy'} = \vec{xy} + \vec{a}$, $\vec{yx'} = -\vec{xy} + \vec{a}$, значит, $\vec{xy}$ должен быть коллинеарен с $\vec{a}$ и меньше $\vec{a}$ по модулю.

Доказательство завершено.

А.Скопенков, Г.Челноков

Ф1658. *Из четырех одинаковых тонких стержней длиной L каждый сделали ромб, скрепив их концы шарнирно (см. рисунок). Шарнир А закреплен, противоположный шарнир Б двигают вдоль диагонали ромба с постоянным ускорением a. Вначале упомянутые противоположные вершины находятся близко друг к другу, а скорость точки Б равна нулю. Какое ускорение будет иметь шарнир В в тот момент, когда стержни АВ и ВБ составят угол 2α? Считайте движение всех точек плоским.*



Ускорение точки B по горизонтали – в направлении движения шарнира $Б$ – равно половине ускорения этого шарнира, т.е. $0{,}5\,a$. Обозначим вертикальную составляющую ускорения шарнира B буквой b. Если мы найдем эту величину, задача будет практически решена.

Для нахождения величины b заметим, что точка B движется по окружности радиусом L, и мы можем воспользоваться формулой для центростремительного ускорения. Но для этого нужно знать скорость точки B в интересующий нас момент времени. Найдем вначале скорость точки $Б$: длина пройденного этой точкой пути равна $2L\sin\alpha = a\tau^2/2$, откуда $v_Б = a\tau = \sqrt{4aL\sin\alpha}$. Скорость точки B – обозначим ее величину через u – перпендикулярна стержню AB, а ее горизонтальная составляющая $(u\cos\alpha)$ равна $0{,}5v_Б = 0{,}5\sqrt{4aL\sin\alpha} = \sqrt{aL\sin\alpha}$. Отсюда получаем

$$u = \frac{\sqrt{aL\sin\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Для нахождения величины b используем центростремительную составляющую ускорения точки B:

$$b\cos\alpha - \frac{1}{2}a\sin\alpha = \frac{u^2}{L} = \frac{aL\sin\alpha}{L\cos^2\alpha},$$

откуда

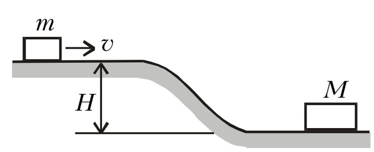
$$b = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha = a\left(\frac{3}{2} + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Мы нашли обе составляющие ускорения шарнира B. Его полное ускорение равно

$$a_B = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

З.Рафаилов

Ф1659. *Тележка массой m движется по горизонтально расположенным рельсам со скоростью v (см. рисунок). Рельсы дальше идут вниз и плавно переходят в новый горизонтальный участок, находящийся на H ниже. Тележка наезжает на неподвижный вагон массой M, стоящий на нижнем горизонтальном участке, и между тележкой и вагоном происходит абсолютно упругий удар. При какой начальной скорости v тележка после удара вновь сможет подняться на верхний горизонтальный участок? Трение отсутствует.*



Скорость спустившейся тележки найдем из закона сохранения энергии: $u_1 = \sqrt{v^2 + 2gH}$. Для того чтобы подняться обратно на горку, тележка должна иметь в направлении горки скорость не меньшую чем $u_2 = \sqrt{2gH}$. Это возможно только в том случае, когда масса налетающей тележки меньше массы неподвижного вагона, – в противном случае оба тела после упругого удара будут удаляться от горки.

Рассмотрим граничный случай – скорость тележки наверху равна минимально необходимой для выполнения условия задачи. Тогда скорость тележки после удара в точности равна u_2. Из закона сохранения импульса найдем импульс вагона:

$$Mu_3 = mu_1 - (-mu_2) = m\left(\sqrt{v^2 + 2gH} + \sqrt{2gH}\right).$$

Еще одно уравнение получим, используя закон сохранения энергии для упругого удара:

$$\frac{mu_1^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + \frac{Mu_3^2}{2}.$$

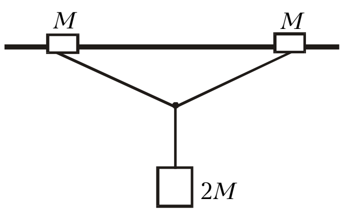
Из этих уравнений найдем минимальную скорость тележки наверху:

$$v = \frac{\sqrt{8MmgH}}{M - m}.$$

В знаменателе дроби стоит неприятное выражение $M - m$, но мы уже говорили о том, что масса налетающей тележки должна быть меньше массы стоящего вагона.

А.Зильберман

Ф1660. *На гладкий горизонтально расположенный стержень надеты две одинаковые шайбы массой M каждая, связанные легкой нерастяжимой нитью длиной 2L (см. рисунок). К середине нити привязан груз массой 2M, который вначале удерживают так, что нить не натянута, но практически не провисает. Груз отпускают, и система приходит в движение без рывка. Найдите максимальные значения скоростей шайб и груза в процессе движения. Ускорение свободного падения g.*



Легко связать скорости тел (нить нерастяжима):

$$v \sin\alpha = u \cos\alpha, \text{ или } v = u \operatorname{ctg}\alpha,$$

где v – скорость каждой шайбы, u – скорость груза, α – угол между стержнем и вертикалью. Ясно, что шайбы все время ускоряются (проекция силы натяжения нити на направление движения шайбы все время положительна), и максимальную скорость v_m шайбы будут иметь непосредственно перед ударом. Скорость груза перед ударом шайб падает до нуля; тогда из закона сохранения энергии

$$2\frac{Mv_m^2}{2} = 2M \cdot gL$$

можно получить

$$v_m = \sqrt{2gL}.$$

Определим теперь максимальную скорость груза u_m во время движения. Выразим эту скорость в виде функции угла α и найдем максимум этой функции. Согласно закону сохранения энергии,

$$2\frac{Mv^2}{2} + \frac{2M \cdot u^2}{2} = 2M \cdot gL\cos\alpha,$$

или

$$u^2 = \frac{2gL\cos\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 2gL\cos\alpha\sin^2\alpha.$$

Тут можно сразу найти максимум, например через производную, но можно это обойти при помощи простого приема – рассматривая движение шайбы в системе отсчета, связанной с грузом (в районе максимума скорости груза его ускорение практически равно нулю, и система получается «хорошей» – инерциальной). В этой системе отсчета шайба движется по окружности радиусом L со скоростью $V = u/\sin\alpha$. Ускорение шайбы направлено вдоль стержня, поэтому сумма проекций сил в перпендикулярном стержню направлении равна нулю:

$$Mg + T\cos\alpha - N = 0,$$

где T – натяжение нити, N – реакция опоры стержня. В направлении вдоль нити получим

$$T + Mg\cos\alpha - N\cos\alpha = \frac{MV^2}{L}.$$

Кроме того, при максимуме скорости груза должны быть уравновешены действующие на него силы:

$$2T\cos\alpha = 2Mg.$$

Отсюда получим

$$T\sin^2\alpha = \frac{Mu^2}{L\sin^2\alpha}.$$

Приравнивая два полученных выражения для u^2, найдем

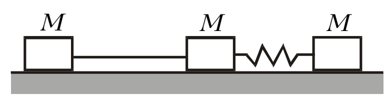
$$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}.$$

Подставляя это значение в выражение для квадрата искомой скорости груза, получим

$$u_m = \sqrt{\frac{4gL}{3\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{gL}{3\sqrt{3}}}.$$

А.Зильберман

Ф1661. *На гладком горизонтальном столе находятся три одинаковые тележки, масса каждой тележки M (см. рисунок). Средняя тележка связана с одной из крайних легкой нитью, а с другой – легкой пружинкой жесткостью k. Вначале систему удерживают так, что пружинка не деформирована, а нить не натянута, но практически не провисает. Толчком придадим «подпружиненной» крайней тележке скорость v_0 вдоль прямой, соединяющей тележки, в направлении от средней. При какой длине нити удар тележек, которые были связаны этой нитью, получится громче всего? Тележки все время двигаются вдоль прямой, пружинка при деформациях подчиняется закону Гука.*



До некоторого момента нить остается натянутой, и связанные ею тележки едут вместе. После того как скорость этой пары достигнет максимума, нить перестанет быть натянутой и не будет действовать на тележки. В этом случае крайняя левая тележка продолжит движение с постоянной скоростью и до самого удара будет двигаться равномерно. «Самый громкий» удар получится в том случае, когда относительная скорость тележек непосредственно перед ударом будет самой большой. Скорость одной из тележек постоянна; значит, максимальная относительная скорость получается в те моменты, когда вторая тележка имеет максимальную скорость навстречу первой.

Вначале проведем расчет первого этапа – найдем максимальную скорость тележек при натянутой нити. Скорость максимальна (или минимальна) в те моменты, когда пружина не деформирована. Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии всей системы без учета энергии пружины:

$$2Mu + Mv = Mv_0, \qquad 2\frac{Mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2},$$

откуда найдем скорость u связанных нитью тележек и скорость v правой тележки:

$$u = \frac{2v_0}{3}, \ v = -\frac{v_0}{3}.$$

Дальше крайняя левая тележка едет со скоростью u, а тележки с пружиной между ними – отдельно от нее. Скорость центра масс тележек с пружиной составляет $v_0/6$, относительно него скорости этих тележек направлены навстречу друг другу и равны по $v_0/2$. Ясно, что условие задачи будет выполнено, если удар произойдет в тот момент, когда относительные скорости связанных пружиной тележек равны $v_0/2$ и направлены друг от друга. Это произойдет ровно через половину периода колебаний (точнее – через целое число периодов плюс полпериода) тележек с пружиной:

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Удобно вести вычисления в системе отсчета, которая двигается вправо со скоростью $v_0/6$ (система центра масс тележек с пружиной). В этой системе свободная левая тележка едет вправо со скоростью $v_0/2$, тогда минимальная длина нити (возможны и другие решения – вместо τ нужно подставлять $nT + \tau$) составляет

$$L = \frac{1}{2}v_0\tau = \frac{\pi v_0}{2}\sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Р.Александров

Ф1662. *В вертикальном теплоизолированном сосуде под тяжелым поршнем находится порция азота. На поршне сверху лежит груда песка, система находится в равновесии, начальный объем газа V_1, начальное давление p_1. Начнем медленно, по одной песчинке, убирать песок и уменьшим давление до p_2; при этом объем газа увеличится до V_2 (конечно, можно было этот объем вычислить, но будем считать, что это уже сделали и вам сообщили результат). Теперь проведем эксперимент иначе – снимем всю порцию песка сразу. Какую кинетическую энергию имел бы в этом случае поршень в тот момент, когда объем газа составил бы V_2? Считайте газ достаточно разреженным.*

При медленном расширении газа без подвода тепла работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Тогда в первом случае работа газа равна разности его энергий в начале и в конце процесса расширения:

$$A = U_1 - U_2 = 2{,}5\left(\nu RT_1 - \nu RT_2\right) = 2{,}5\left(p_1V_1 - p_2V_2\right).$$

По условию задачи поршень массивный; следовательно, он будет двигаться медленно даже тогда, когда мы снимаем всю порцию песка сразу. Поэтому работа газа во втором случае получится такой же, как и в первом (медленное расширение газа без подвода тепла).

Во втором случае работа газа идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии поршня. Потенциальная энергия поршня увеличилась на

$$\Delta E_p = Mg\left(H_2 - H_1\right) = \frac{Mg\left(V_2 - V_1\right)}{S} = p_2\left(V_2 - V_1\right).$$

Тогда кинетическая энергия поршня получится равной

$$\Delta E_k = A - \Delta E_p = 2{,}5\left(p_1V_1 - p_2V_2\right) - p_2\left(V_2 - V_1\right).$$

М.Учителев

Ф1663. *На закрепленную тонкостенную непроводящую сферу радиусом R нанесен распределенный равномерно по поверхности заряд Q. В стенке сделано маленькое круглое отверстие площадью S. В центре сферы вначале удерживают очень маленькое по размерам массивное тело, на которое помещен заряд q того же знака, что и заряд сферы. Тело отпускают, и оно начинает двигаться под действием только электростатических сил (сила тяжести отсутствует). Объясните, почему тело будет двигаться в сторону дырки. Найдите кинетическую энергию тела, когда оно окажется в центре дырки. Точно вычислить эту энергию трудно – постарайтесь найти не слишком грубое приближение.*

«Заполним» дырку такими же зарядами, что и на остальной части сферы, получив равномерно заряженную сферу, которая не создает поля внутри, и одновременно добавим туда же заряды противоположного знака, которые на поверхности дырки дадут в сумме нулевой заряд. Именно эти заряды противоположного знака, находящиеся на площади S, и создают поле внутри сферы, именно это поле и будет разгонять тело, несущее заряд q. Ясно теперь, что тело действительно будет двигаться в сторону дырки, а его кинетическая энергия определится разностью потенциалов между центром сферы и центром дырки. Поскольку поле равномерно заряженной сферы можно не учитывать, задача сводится к расчету разности потенциалов, создаваемой маленьким практически плоским участком площадью S, заряженным с плотностью $\sigma = Q/\left(4\pi R^2\right)$.

Вдали от «дырки» поле похоже на поле точечного заряда, вблизи – на поле заряженной плоскости. Расчет можно провести, нарисовав кривые напряженностей этих полей на одном графике и плавно перейдя от одного к другому (например, от бесконечности до точки пересечения кривых взять поле точечного заряда, а дальше до самого центра дырки – однородное поле плоскости). В этом случае разность потенциалов найти будет несложно.

Но можно сделать расчет немного проще. Найти потенциал поля дырки в центре сферы совсем просто:

$$\varphi_ц = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{QS}{16\pi^2\varepsilon_0 R^3}.$$

Для того чтобы найти потенциал в центре дырки, разобьем кружок на тонкие кольца и посчитаем сумму вкладов этих колец в потенциал центра (пусть радиус кольца x, его ширина dx):

$$d\varphi_д = \frac{\sigma\cdot 2\pi x dx}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\sigma dx}{2\varepsilon_0},$$

$$\varphi_д = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0} = \frac{Q\sqrt{S/\pi}}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Видно, что при малых размерах дырки $\varphi_ц \ll \varphi_д$, и кинетическая энергия тела равна

$$E_k = q\varphi_д = \frac{qQ\sqrt{S/\pi}}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

(Кстати, расчет по способу «сшивания» графиков дает почти тот же ответ – он больше в $\sqrt{2}$ раз.)

А.Зильберман

Ф1664. *В цепи, изображенной на рисунке 1, все резисторы имеют одно и то же сопротивление. Во сколько раз изменится сопротивление цепи, измеряемое между точками А и Б, если замкнуть проводником точки В и Г?*

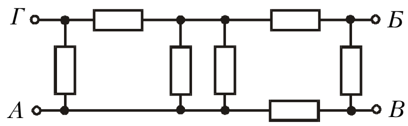


Рис.1

Для удобства вычислений обозначим на чертеже еще точку $Д$ (рис.2). Видно, что резисторы $АГ$ и $ГД$ соединены последовательно, так что их можно заменить резистором сопротивлением $2R$. После замены получаем три параллельно соединенных резистора – этот резистор сопротивлением $2R$ и два резистора сопротивлением по R каждый, включенные между точками $А$ и $Д$. Заменим эту тройку резистором сопротивлением $0{,}4R$ – в сумме с последовательно подключенным резистором $ДБ$ получим $1{,}4R$. Резисторы $АВ$ и $ВБ$ соединены последовательно, заменим их резистором сопротивлением $2R$. После расчета параллельного соединения этого резистора и резистора сопротивлением $1{,}4R$ получим $14R/17$.

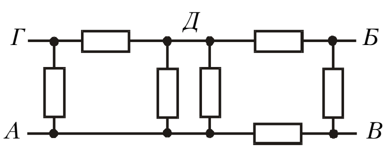


Рис.2

Теперь замкнем точки $В$ и $Г$. Перерисуем схему так, чтобы была ясна получившаяся симметрия (рис.3). Видно, что точка $Д$ и точка $В$, $Г$ совершенно равноправны – к той и к другой подходят одинаковые цепочки от точки $А$ и от точки $Б$. Это означает, что ток через резистор, включенный между точками $Д$ и $В$, F, равен нулю и этот резистор можно просто удалить из схемы – ничего при этом не изменится, а схема будет выглядеть проще. После «выбрасывания» получим две простые цепочки сопротивлением по $1{,}5R$, соединенные параллельно. Полное сопротивление при этом составит $3R/4$.

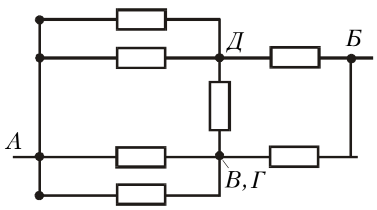
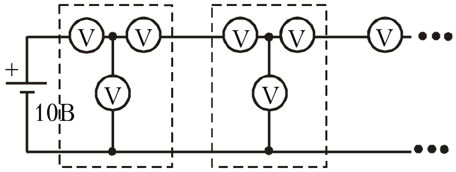


Рис.3

Таким образом, после замыкания точек $В$ и $Г$ полное сопротивление между точками $А$ и $Б$ уменьшилось в $56/51 \approx 1{,}1$ раза.

А.Простов

Ф1665. *К батарейке напряжением 10 В подключена схема, содержащая очень большое число одинаковых ячеек. Каждая ячейка состоит из трех одинаковых вольтметров, как показано на рисунке. Найдите показания вольтметров в первой ячейке. Что показывают вольтметры в ячейке номер пять?*



Найдем обычным способом сопротивление бесконечной цепочки Z – добавим одно звено и потребуем, чтобы сопротивление осталось равным Z:

$$R + \frac{R(R+Z)}{R+Z+R} = Z,$$

откуда

$$Z = R\sqrt{3}.$$

Теперь приступим к расчету напряжений. Пусть нижний вольтметр в первом звене показывает U, тогда левый покажет $\mathcal{E} - U$, где $\mathcal{E}$ – напряжение батарейки, а правый (ток через него равен разности токов первых двух приборов) покажет $\mathcal{E} - 2U$. Напряжение на входе второго звена определяется произведением тока правого вольтметра (такой же ток втекает во второе звено) на сопротивление бесконечной цепи Z. Значит, это напряжение больше напряжения правого вольтметра в $\sqrt{3}$ раз, т.е. равно $\sqrt{3}(\mathcal{E} - 2U)$. Сумма последних двух напряжений равна напряжению нижнего вольтметра:

$$U = (\mathcal{E} - 2U) + \sqrt{3}(\mathcal{E} - 2U).$$

Отсюда

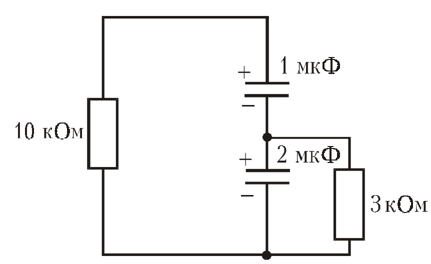
$$U = \mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 4{,}23 \text{ В}.$$

Итак, левый вольтметр показывает $\mathcal{E} - U \approx 5{,}77$ В, правый вольтметр показывает $\mathcal{E} - 2U \approx 1{,}54$ В.

Напряжение на входе второй ячейки составляет $\mathcal{E}\left(2 - \sqrt{3}\right)$. Тогда показания приборов в пятой ячейке будут меньше показаний соответствующих приборов первой ячейки в $1\Big/\left(2 - \sqrt{3}\right)^4 \approx 194$ раза.

Р.Повторов

Ф1666. *Конденсатор емкостью 1 мкФ заряжен до напряжения 4 В и подключен «минусом» к «плюсу» конденсатора емкостью 2 мкФ, заряженного до напряжения 6 В (см. рисунок). Параллельно конденсатору большей емкости подключают резистор сопротивлением 3 кОм, а к свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резистор сопротивлением 10 кОм. Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов за большой интервал времени?*



Численные данные в этой задаче аккуратно подобраны. Сразу после подключения через резистор сопротивлением 10 кОм потечет ток

$$I_1 = \frac{U_1 + U_2}{R_1} = 1 \text{ мА},$$

а через резистор сопротивлением 3 кОм –

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 2 \text{ мА}.$$

Верхний конденсатор разряжается током 1 мА, а нижний – суммой токов 1 мА + 2 мА, т.е. в 3 раза большим током. Но при заданных в задаче напряжениях и емкостях отношение зарядов конденсаторов также равно 1:3, поэтому они будут разряжаться, все время сохраняя это отношение зарядов. Значит, соотношение между токами резисторов сохранится равным

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2},$$

а отношение мощностей составит

$$\frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Полное количество теплоты равно сумме начальных энергий конденсаторов, распределение же энергии между резисторами определяется отношением мощностей. Окончательно получим

$$W_1 = \frac{5}{11} W = \frac{5}{11}\left(\frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}\right) = 20 \text{ мкДж},$$

$$W_2 = \frac{6}{11} W = 24 \text{ мкДж}.$$

З.Рафаилов

Ф1667. *К сети переменного напряжения частоты 50 Гц подключены последовательно конденсатор емкостью 10 мкФ и амперметр переменного тока. Последовательно с ними включают катушку. При какой индуктивности катушки показания амперметра увеличатся в два раза? При какой индуктивности показания уменьшатся в два раза? Как изменятся токи, если катушки с вычисленными вами параметрами подсоединять не последовательно, а параллельно конденсатору? Элементы цепи считать идеальными.*

Это – несложная задача. Ток в цепи с конденсатором равен

$$I_1 = \frac{U}{X_C} = U\omega C.$$

Если последовательно с конденсатором включить катушку индуктивностью L, амперметр покажет ток

$$I_2 = \frac{U}{\left|X_C - X_L\right|} = \frac{U}{\left|1/(\omega C) - \omega L\right|}.$$

Для удвоенного тока есть две возможности. В первом случае

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L_1 = \frac{1}{2\omega C},$$

откуда получаем

$$\omega^2 L_1 C = 0{,}5, \text{ и } L_1 = \frac{1}{2\omega^2 C} \approx 0{,}5 \text{ Гн}.$$

Во втором случае

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\omega C},$$

откуда

$$\omega^2 L_2 C = 1{,}5, \text{ и } L_2 = 3L_1 \approx 1{,}5 \text{ Гн}.$$

Для половинного тока есть только один вариант:

$$\omega L_3 - \frac{1}{\omega C} = \frac{2}{\omega C},$$

откуда находим

$$\omega^2 L_3 C = 3, \; L_3 = 6L_1 \approx 3 \text{ Гн}.$$

В случае параллельного включения катушек проведем расчет в общем случае, а затем подставим вычисленные значения индуктивностей. Ток в цепи будет равен

$$I = \frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C} = \frac{U}{\omega L} - U\omega C = $$

$$= U\omega C\left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1\right) = I_1\left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1\right).$$

Для индуктивности L_1 получится ток $I_1\left(1/\left(\omega^2 L_1 C\right) - 1\right) = I_1$, для L_2 получится ток $I_1/3$, для L_3 – ток $2I_1/3$.

М.Учителев